

ИЗВЕСТИЯ
ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

*Северо-Кавказский
регион*

ЕСТЕСТВЕННЫЕ

НАУКИ

2015

2

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ РЕГИОН

Регистрационный номер 011019
Комитета Российской Федерации по печати
Научно-образовательный и прикладной журнал
Издается с 1973 г.
Периодичность серии 4 номера в год
№ 2 (186) 2015 г.

ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА, МЕХАНИКА

- Ахмедов Н.К., Мехтиев М.Ф., Шахвердиева Г.Н.** Анализ осесимметричной задачи теории упругости для неоднородной трансверсально-изотропной конической оболочки..... 5
- Батищев В.А., Николаенко Ю.С., Пискунов А.С.** Влияние наночастиц на перенос тепла в пограничном слое Марангони с внешним потоком 12
- Деундяк В.М., Чекунов Е.С.** Алгоритм нахождения минимального элемента n -мерной решетки Бернштейна над полем рациональных функций $F_{2^m}(x)$ 17
- Макаров С.С., Устинов Ю.А.** Крутильные колебания оболочки вращения со сложной формой меридиана 22
- Назирова А.Э., Усов А.Б.** Моделирование вертикальной маркетинговой системы с учетом возможной коррупции 27
- Пожарский Д.А., Полтинников В.И.** Контактные задачи для составного полупространства 34
- Рамазанов А.-Р.К., Магомедова В.Г., Ибрагимова Б.М.** О взаимосвязи модулей непрерывности со знакочувствительным весом непрерывной на отрезке функции 36
- Седенко В.И., Богачев Т.В., Алексейчик Т.В.** Существование слабых решений моделей Маргерра – Власова термоупругих колебаний пологих оболочек с малой инерцией продольных перемещений 42
- Скорыходов В.А., Шевелев М.В.** Задача о максимальном потоке в сетях с потерями в вершинах 47
- Хубежты Ш.С., Цуцаев А.О.** Квадратурные формулы для сингулярных интегралов, имеющих почти гауссовскую степень точности 53
- Цветкович Л., Дорословачки К., Крукиер Б.Л., Крукиер Л.А.** Улучшение оценки максимум нормы обратных блочных матриц Некрасова 58

ХИМИЯ

- Кравцов А.А., Сысоев И.А., Блинов А.В., Ясная М.А., Селеменова Д.Г., Арефьева Л.П.** Исследование влияния природы растворителя на структуру и фазовый состав наноразмерного диоксида титана 62
- Плиева А.Т., Абаева И.Н., Эмануилиди С.Е., Арутюнянц А.А.** Исследование производных акридина электрохимическими методами 66
- Хуссейн Х.Х.Х., Семченко В.В., Хентов В.Я.** Влияние поверхностно-активных веществ на реакцию взаимодействия органического лиганда с поверхностью металла в углеводородах 72

БИОЛОГИЧЕСКИЕ НАУКИ	<i>Малиновкин А.В.</i> Новые находки рыжей вечерницы (<i>Nyctalus noctula</i>) в г. Ростове-на-Дону	76
	<i>Миноранский В.А., Малиновкин А.В.</i> Нетопырь Куля (<i>Pipistrellus kuhlii</i> Kuhl.) в Ростовской области	80
	<i>Ошуркова Ю.Л., Соболева Е.Н.</i> Оценка состояния системы гемостаза у коров при клинической форме мастита.....	84
НАУКИ О ЗЕМЛЕ	<i>Коханистая Е.В., Хоружая Т.А.</i> Современный уровень солевого загрязнения Пролетарского и Веселовского водохранилищ	88
	<i>Собисевич Л.Е., Потемка Э.П., Собисевич А.Л., Канониди Х.Д., Канониди К.Х., Преснов Д.А., Суворова И.И.</i> Сейсмичность Крымско-Кавказского региона (по результатам инструментальных наблюдений гидродинамических и сейсмических процессов	93
	<i>Шишкина Д.Ю.</i> Тяжелые металлы в почвах урболандшафтов г. Ростова-на-Дону	101
МЕДИЦИНА	<i>Друккер Н.А., Линде В.А., Зенкина З.В., Некрасова М.Г., Шкотова Е.О., Кулакова В.А., Ганиковская Ю.В.</i> Современные аспекты метаболомных нарушений в околоплодных водах при ранних преждевременных родах	106
ШТРИХИ К ПОРТРЕТУ	<i>Ватутьян А.О., Карякин М.И., Чебаков М.И.</i> Иосиф Израилевич Ворович	111

IZVESTIYA VUZOV. SEVERO-KAVKAZSKII REGION

Reg. No. 011019

Of the Committee of the Press of the Russian Federation

Scientifically educational and applied magazine

Was founded in 1973.

Period is 6 numbers per a year

№ 2 (186) 2015.

NATURAL SCIENCE

CONTENTS

MATHEMATICS, MECHANICS	<i>Akhmedov N.K., Mekhtiev M.F., Shakhverdieva G.N.</i> Analysis of Axisymmetric Problem of Elasticity Theory for Inhomogeneous Transversally-Isotropic Conic Shell5
	<i>Batishchev V.A., Nikolaenko Yu.S., Piskunov A.S.</i> Influence of the Nanoparticles on the Heat Transfer in the Marangoni Boundary Layer at the External Flow12
	<i>Deundyak V.M., Chekunov E.S.</i> The Algorithm for Determining the Minima of the n -Dimensional Bernstein Lattice over Rational Function Fields $F_{2^m}(x)$17
	<i>Makarov S.S., Ustinov Yu.A.</i> Torsional Oscillation of Revolution Shells with Complicated Shape of Meridian22
	<i>Nazirov A.E., Usov A.B.</i> Modeling of the Vertical Marketing System under Corruption27
	<i>Pozharskii D.A., Poltinnikov V.I.</i> Contact Problems for a Composite Half-Space34
	<i>Ramazanov A.-R.K., Magomedova V.G., Ibragimova B.M.</i> On Interrelation of Continuity Modules with Sign-Sensitive Weight of Continuous Function on Segment36
	<i>Sedenko V.I., Bogachev T.V., Alekseichik T.V.</i> The Existence of the Weak Solutions of Margurre-Vlasov Models for Thermoelastic Oscillations of Sloping Casings with the Weak Inertia of the Longitudinal Transfers.42
	<i>Skorokhodov V.A., Shevelev M.V.</i> Maximum Flow Problem in Networks with Losses at the Vertices47
	<i>Khubezhty Sh.S., Tsutsaev A.O.</i> Quadrature Formulas for Singular Integrals with Nearly Gaussian Degree of Accuracy53
	<i>Tsvetkovich L. Doroslovachki K., Krukier B.L., Krukier L.A.</i> Improving the Assessment of the Maximum Rate of the Nekrasov Inverse Block Matrices58
CHEMISTRY	<i>Kravtsov A.A., Sysoev I.A., Blinov A.V., Yasnaya M.A. Selemeneva D.G., Aref'eva L.P.</i> Studying of Influence of Kind Solvent on Structure and Phase Composition of Nanosized TiO_262
	<i>Plieva A.T., Abaeva I.N., Emanulidi S.E., Arutyunants A.A.</i> Study of Acridine Derivatives by Electrochemical Methods66
	<i>Khussein Kh.Kh.Kh., Semchenko V.V., Khentov V.Ya.</i> Influence of Surfactants on the Reaction of Organic Ligand with Metal Surface in Hydrocarbons72
BIOLOGICAL SCIENCE	<i>Malinovkin A.V.</i> New Findings of Noctule (<i>Nyctalus Noctula</i>) in Rostov-on-Don76
	<i>Minoranskii V.A., Malinovkin A.V.</i> Kul Bat (<i>Pipistrellus Kuhlii</i> Kuhl.) in the Rostov Region80
	<i>Oshurkova Yu.L., Soboleva E.N.</i> Evaluation of the Cows Hemostatic System in the Clinical Form of Mastitis84

EARTH SCIENCES	<i>Kokhanistaya E.V., Khoruzhaya T.A.</i> Contemporary Level of Salt Pollution of Proletarian and Veselovsk Reservoirs.....	88
	<i>Sobisevich L.E., Potemka E.P., Sobisevich A.L., Kanonidi Kh.D., Kanonidi K.Kh., Presnov D.A., Suvorova I.I.</i> Seismicity of the Crimean -Caucasian Region (Based on the Results of Instrumental Observations of Hydrodynamic and Seismic Processes).....	93
	<i>Shishkina D.Yu.</i> Heavy Metals in Landscape Soils of Rostov-on-Don	101
MEDICINE	<i>Drukker N.A., Linde V.A., Zenkina Z.V., Nekrasov M.G., Shkotova E.O., Kulakova V.A., Ganikovskaya Yu.V.</i> Modern Aspects of Metabolic Violations in the Amniotic Fluid During Early Preterm Delivery	106
	<i>Vatulyan A.O., Karyakin M.I., Chebakov M.I.</i> Iosif Izrailevich Vorovich.....	111
TOUCHES TO THE PORTRAIT		

МАТЕМАТИКА, МЕХАНИКА

УДК 539.3

АНАЛИЗ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОЙ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

© 2015 г. Н.К. Ахмедов, М.Ф. Мехтиев, Г.Н. Шахвердиева

Ахмедов Натик Каракиши-оглы – доктор математических наук, профессор, кафедра математических методов прикладного анализа, факультет прикладной математики и кибернетики, Бакинский государственный университет, ул. З. Халилова, 23, г. Баку, AZ-1073/1, Азербайджанская Республика, e-mail: anatig@gmail.com

Akhmedov Natic Karakishi-ogly – Doctor of Mathematical Science, Professor, Department of Mathematical Methods of Applied Analysis, Faculty of Applied Mathematics and Cybernetics, Baku State University, Z. Khalilov St., 23, Baku, AZ-1073/1, Azerbaijan, e-mail: anatig@gmail.com

Мехтиев Магомед Фарман-оглы – доктор физико-математических наук, профессор, академик, Институт математики и механики НАН Азербайджана, ул. Б. Вахабзаде, 9, г. Баку, AZ-1141, Азербайджанская Республика, e-mail: mehtiev_magomed@mail.ru

Mekhtiev Magomed Farman-ogly – Doctor of Physical and Mathematical Science, Professor, Academician, Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, B. Vakhabzade St., 9, Baku, AZ-1141, Azerbaijan, e-mail: mehtiev_magomed@mail.ru

Шахвердиева Гюльназ Нариман-кызы – преподаватель, кафедра математики и информатики, Бакинский славянский университет, ул. С. Рагимова, 145, г. Баку, AZ-1141, Азербайджанская Республика, e-mail: bgng@mail.ru

Shakhverdieva Gyulnaz Nariman-kyzy – Lecturer, Department of Mathematics and Informatics, Baku Slavonic University, S. Rahimov St., 145, Baku, AZ-1141, Azerbaijan, e-mail: bgng@mail.ru

Методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости изучается осесимметричная задача теории упругости для неоднородной трансверсально-изотропной конической оболочки. Построены неоднородные и однородные решения. Изучено поведение решения полученных краевых задач как во внутренней части оболочки, так и около ее краев. Раскрыты особенности напряженно-деформированного состояния неоднородной трансверсально-изотропной конической оболочки переменной толщины.

Ключевые слова: неоднородные решения, однородные решения, краевой эффект, пограничный слой, анизотропия, асимптотический метод.

By the method of asymptotic integration of elasticity theory equations, an axisymmetric problem of elasticity theory for an inhomogeneous transversally-isotropic conic shell is studied. Inhomogeneous and homogeneous solutions are constructed. Behavior of the solution of the obtained boundary value problems both in the internal part of the shell and near its edges is studied. The peculiarities of the stress-strain state of a variable thickness inhomogeneous transversally-isotropic conic shell are revealed.

Keywords: inhomogeneous solutions, homogeneous solutions, edge effect, boundary layer, anisotropy, asymptotic method.

В [1] асимптотическим методом исследованы осесимметричные задачи теории упругости для конической оболочки. В [2, 3] построена асимптотическая теория неоднородной конической оболочки переменной толщины. В [4] разработана общая теория трансверсально-изотропной конической оболочки переменной толщины. Решение трехмер-

ных задач для анизотропных конических оболочек связано с дополнительными трудностями, обусловленными значительным увеличением числа параметров, описывающих оболочку. В отличие от изотропных конических оболочек здесь появляются новые группы решений, которые характерны только для анизотропных конических оболочек.

Рассмотрим осесимметричную задачу теории упругости для неоднородной трансверсально-изотропной конической оболочки переменной толщины, которая представляет собой тело с двумя коническими и двумя сферическими границами. В сферической системе координат r, θ, ϕ область, занятую конической оболочкой, обозначим через

$$\Gamma = \{r \in [r_1; r_2], \theta \in [\theta_1; \theta_2], \phi \in [0; 2\pi]\}.$$

Уравнения равновесия в перемещениях имеют вид

$$(L_0 + \varepsilon \partial_1 L_1 + \varepsilon^2 \partial_1^2 L_2) \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (1)$$

где L_k – матричные дифференциальные операторы вида

$$L_0 = \begin{pmatrix} \partial(b_{44}\partial) + 2\varepsilon^2(b_{12} - b_{22} - b_{23}) + \varepsilon(b_{12} - b_{22} - b_{23})\partial + \\ + \varepsilon b_{44} \operatorname{ctg}(\theta_0 + \varepsilon\eta)\partial & \varepsilon^2(b_{12} - b_{23} - b_{44} - b_{22}) \operatorname{ctg}(\theta_0 + \varepsilon\eta) - \varepsilon\partial(b_{44}) \\ \varepsilon\partial((b_{22} + b_{23})) + 2\varepsilon b_{44}\partial & \partial(b_{23}\partial) + \varepsilon\partial(b_{23} \operatorname{ctg}(\theta_0 + \varepsilon\eta)) - 2\varepsilon^2 b_{44} + (b_{22} - b_{23}) \times \\ \times \varepsilon \operatorname{ctg}(\theta_0 + \varepsilon\eta)\partial - (b_{22} - b_{23})\varepsilon^2 \operatorname{ctg}^2(\theta_0 + \varepsilon\eta) \end{pmatrix},$$

$$L_1 = \begin{pmatrix} 2\varepsilon b_{11} & \partial(b_{44}) + b_{12}\partial + \varepsilon(b_{44} + b_{12}) \operatorname{ctg}(\theta_0 + \varepsilon\eta) \\ \partial(b_{12}) + b_{44}\partial & 2\varepsilon b_{44} \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{44} \end{pmatrix},$$

$$\partial = \frac{\partial}{\partial \eta}, \partial_1 = \rho \frac{\partial}{\partial \rho}, \partial_1^2 = \rho^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2}, \mathbf{u}(u_\rho, u_\theta)^T.$$

Здесь u_ρ, u_θ – компоненты вектора перемещений; $\eta = \frac{\theta - \theta_0}{\varepsilon}$, $\rho = \frac{r}{r_2}$ – новые безразмерные переменные; $\varepsilon = \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}$ – малый параметр, характеризующий толщину конической оболочки; $\theta_0 = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$ – угол раствора срединной поверхности конуса; $\eta \in [-1; 1]$; $\rho \in [\rho_1; 1]$; $\theta_0 \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Предполагаем, что модули упругости $b_{ij} = b_{ij}(\eta)$ являются произвольными кусочно-непрерывными функциями переменной η , значения которой могут меняться в пределах одного порядка. Такую оболочку будем называть слабонеоднородной [5].

Пусть на боковых поверхностях конической оболочки заданы граничные условия

$$\boldsymbol{\sigma} = M \mathbf{u}|_{\eta=\pm 1} = \boldsymbol{\tau}^\pm(\rho). \quad (2)$$

Здесь $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{\rho\theta}, \sigma_{\theta\theta})^T$, $M = \frac{1}{\varepsilon \rho} (M_0 + \varepsilon \partial_1 M_1)$,

$$M_0 = \begin{pmatrix} b_{44}\partial & -\varepsilon b_{44} \\ (b_{22} + b_{23})\varepsilon & b_{22}\partial + \varepsilon b_{23} \operatorname{ctg}(\theta_0 + \varepsilon\eta) \end{pmatrix},$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & b_{44} \\ b_{12} & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\tau}^\pm(\rho) = (h^\pm(\rho); f^\pm(\rho))^T.$$

Нагрузки $h^\pm(\rho), f^\pm(\rho)$, заданные на боковых поверхностях, достаточно гладкие функции, относительно ε имеют порядок $O(1)$.

Рассмотрим построение частных решений уравнений (1), удовлетворяющих граничным условиям (2), т.е. неоднородных решений.

Предполагая, что величина ε достаточно мала, а нагрузка, заданная на конических границах относительно ε , имеет порядок $O(1)$, неоднородные решения будем искать в виде

$$\mathbf{u} = \varepsilon^{-1}(\mathbf{u}_0 + \varepsilon \mathbf{u}_1 + \dots),$$

$$\mathbf{u}_i = (u_{\rho i}, u_{\theta i})^T, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

Подстановка (3) в (1), (2) приводит к системе, последовательное интегрирование которой дает соотношения для коэффициентов разложения (3)

$$u_{\rho 0} = e_1(\rho), \quad u_{\theta 0} = e_2(\rho),$$

$$u_{\rho 1} = (\eta + 1)(e_2(\rho) - \rho e_2'(\rho)) + e_3(\rho),$$

$$u_{\theta 1} = -\int_{-1}^{\eta} \frac{b_{23}}{b_{22}} dx \cdot e_2(\rho) \operatorname{ctg} \theta_0 -$$

$$-\int_{-1}^{\eta} \frac{b_{12}}{b_{22}} dx \cdot \rho e_1'(\rho) - \int_{-1}^{\eta} \frac{(b_{22} + b_{23})}{b_{22}} dx \cdot e_1(\rho) + e_4(\rho), \quad (4)$$

где

$$\begin{cases} (p_0 - b_{11}^{(0)})[\rho e_1''(\rho) + 2e_1'(\rho)] + (m_0 + t_0) \frac{e_1(\rho)}{\rho} + \\ + \operatorname{ctg} \theta_0 \left[e_2'(\rho) t_0 + (m_0 + t_0) \frac{e_2(\rho)}{\rho} \right] = h(\rho), \\ e_2(\rho) m_0 \operatorname{ctg} \theta_0 - t_0 \rho e_1'(\rho) + m_0 e_1(\rho) = \rho f(\rho) \operatorname{tg} \theta_0, \end{cases} \quad (5)$$

$$p_k = \int_{-1}^1 \frac{b_{12}^2}{b_{22}} \eta^k d\eta; \quad m_k = \int_{-1}^1 \frac{(b_{22}^2 - b_{23}^2)}{b_{22}} \eta^k d\eta,$$

$$t_k = \int_{-1}^1 \frac{b_{12}(b_{23} - b_{22})}{b_{22}} \eta^k d\eta, \quad b_{ij}^{(k)} = \int_{-1}^1 b_{ij} \eta^k d\eta,$$

$$f(\rho) = f^+(\rho) - f^-(\rho), \quad h(\rho) = h^+(\rho) - h^-(\rho).$$

Однородным решением назовем всякое решение уравнений (1), удовлетворяющее условию отсутствия напряжений на боковых поверхностях.

Построим однородное решение. Положим в (2) $\boldsymbol{\tau}^\pm(\rho) = \mathbf{0}$. Отыскивая решения полученных одно-

родных систем в виде $\mathbf{u}(\rho, \eta) = \rho^{z-\frac{1}{2}} \mathbf{w}(\eta)$, $\mathbf{w}(\eta) = (a; c)^T$, приходим к несамосопряженной за-

даче со спектральным параметром z

$$\begin{cases} \left(L_0 + \varepsilon \left(z - \frac{1}{2} \right) (L_1 - \varepsilon L_2) + \varepsilon^2 \left(z - \frac{1}{2} \right)^2 L_2 \right) \mathbf{w} = \mathbf{0}, \\ \left(M_0 + \varepsilon \left(z - \frac{1}{2} \right) M_1 \right) \mathbf{w}|_{\eta=\pm 1} = \mathbf{0} \quad \text{при } \eta = \pm 1. \end{cases} \quad (6)$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ для решения (6) воспользуемся асимптотическим методом, основанным на трех итерационных процессах [6]. Однородные решения, соответствующие первому итерационному процессу, можно получить из (4), (5), если в них положить $\mathbf{r}^\pm(\rho) = \mathbf{0}$:

$$u_\rho^{(1)} = \frac{A}{\rho} \left\{ m_0 \operatorname{ctg} \theta_0 + \varepsilon \left[-2\eta(m_0 + t_0) + m_1 + 2t_1 + \right. \right. \quad (7)$$

$$\left. \left. + \operatorname{ctg}^2 \theta_0 (m_0 (d_2 - d_1 + d_3 - t_1 - m_1) + t_0 (d_3 - d_0)) \right] \times \right. \\ \left. \times (m_0 + t_0)^{-1} \right\} + O(\varepsilon^2).$$

$$u_\theta^{(1)} = \frac{A}{\rho} \left\{ -(m_0 + t_0) + \varepsilon \operatorname{ctg} \theta_0 \left[(m_0 + t_0) \cdot \int_{-1}^{\eta} \frac{b_{23}}{b_{22}} dx + m_0 (\eta + 1) + \right. \right. \\ \left. \left. + m_0 \int_{-1}^{\eta} \frac{(b_{12} - b_{23})}{b_{22}} dx \right] + O(\varepsilon^2) \right\},$$

где

$$d_0 = \int_{-1}^1 \frac{(b_{22} + b_{23})}{b_{22}} \left(\int_{-1}^{\eta} \frac{(b_{23} - b_{22})}{b_{22}} dx \right) d\eta,$$

$$d_1 = \int_{-1}^1 \frac{(b_{22} + b_{23})}{b_{22}} \left(\int_{-1}^{\eta} \frac{b_{12} (b_{23} - b_{22})}{b_{22}} dx \right) d\eta,$$

$$d_2 = \int_{-1}^1 \frac{(b_{23} - b_{22})}{b_{22}} \left(\int_{-1}^{\eta} \frac{(b_{12} - b_{23} - b_{22})}{b_{22}} dx \right) d\eta,$$

$$d_3 = \int_{-1}^1 \frac{(b_{23} - b_{22})}{b_{22}} \left(\int_{-1}^{\eta} \frac{b_{23}}{b_{22}} dx \right) d\eta.$$

Этим решениям соответствуют собственные значения $z_0 = -\frac{1}{2}$.

Напряжения, соответствующие решениям (7), имеют вид

$$\sigma_{\theta\theta}^{(1)} = \frac{A\varepsilon}{\rho^2} \operatorname{ctg}^2 \theta_0 \left[m_0 \int_{-1}^{\eta} \chi_2(x) dx - t_0 \int_{-1}^{\eta} \chi_1(x) dx + O(\varepsilon) \right],$$

$$\sigma_{\rho\rho}^{(1)} = \frac{A}{\rho^2} \operatorname{ctg} \theta_0 \left[\frac{m_0}{g_0} + t_0 \chi_2 + O(\varepsilon) \right], \quad (8)$$

$$\sigma_{\phi\phi}^{(1)} = \frac{A}{\rho^2} \operatorname{ctg} \theta_0 \left[m_0 \chi_2 - t_0 \chi_1 + O(\varepsilon) \right],$$

$$\sigma_{\rho\theta}^{(1)} = \frac{A\varepsilon}{\rho^2} \operatorname{ctg} \theta_0 \left[m_0 \int_{-1}^{\eta} \chi_2(x) dx - t_0 \int_{-1}^{\eta} \chi_1(x) dx + O(\varepsilon) \right],$$

$$\text{где } g_0 = \frac{b_{22}}{b_{12}^2 - b_{11}b_{22}}, \quad \chi_1 = \frac{b_{22}^2 - b_{23}^2}{b_{22}}, \quad \chi_2 = \frac{b_{12}(b_{23} - b_{22})}{b_{22}}.$$

Решения, соответствующие второму итерационному процессу, будем отыскивать в виде

$$a = \varepsilon^{\frac{1}{2}} \left(a_{20} + \varepsilon^{\frac{1}{2}} a_{21} + \dots \right),$$

$$c = c_{20} + \varepsilon^{\frac{1}{2}} c_{21} + \dots, \quad z = \varepsilon^{-\frac{1}{2}} (\alpha_0 + \varepsilon \alpha_1 + \dots) \quad (9)$$

Подставляя (9) в (6), после некоторых преобразований получим

$$u_\rho^{(2)} = \left(\frac{\varepsilon}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^4 B_j U_{\rho j}^{(2)}, \quad u_\theta^{(2)} = \rho^{-\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^4 B_j U_{\theta j}^{(2)}, \quad (10)$$

где

$$U_{\rho j}^{(2)} = \left\{ -(\eta + 1) \alpha_{0j}^2 (b_{11}^{(0)} - p_0) q_j + q_j^2 + \right. \\ \left. + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \left[(\eta + 1) (\alpha_{0j} (b_{11}^{(0)} - p_0) (m_0 + 2t_0) \operatorname{ctg} \theta_0 - \right. \right. \\ \left. \left. - \alpha_{1j} \alpha_{0j}^2 (b_{11}^{(0)} - p_0) q_j \ln \rho) + \alpha_{1j} q_j^2 \ln \rho \right] + O(\varepsilon) \right\} \exp \left(\frac{\alpha_{0j}}{\sqrt{\varepsilon}} \ln \rho \right),$$

$$U_{\theta j}^{(2)} = \left\{ \alpha_{0j} (b_{11}^{(0)} - p_0) q_j + \right. \\ \left. + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \cdot \left[-\frac{3}{2} \alpha_{0j}^2 (p_1 + p_0 - b_{11}^{(1)} - b_{11}^{(0)}) - \left(m_0 + \frac{1}{2} t_0 \right) \operatorname{ctg} \theta_0 + \right. \right. \\ \left. \left. + \alpha_{0j} \alpha_{1j} q_j \ln \rho \right] (b_{11}^{(0)} - p_0) + O(\varepsilon) \right\} \exp \left(\frac{\alpha_{0j}}{\sqrt{\varepsilon}} \ln \rho \right),$$

$$q_j = \alpha_{0j}^2 (b_{11}^{(1)} + b_{11}^{(0)} - p_1 - p_0) + t_0 \operatorname{ctg} \theta_0.$$

Для определения α_{0j} получаем биквадратное уравнение

$$\left(p_0 p_2 - p_0 b_{11}^{(2)} - p_2 b_{11}^{(0)} + b_{11}^{(0)} b_{11}^{(2)} - (b_{11}^{(1)} - p_1)^2 \right) \alpha_{0j}^4 + \\ + 2 \operatorname{ctg} \theta_0 (t_1 b_{11}^{(0)} - t_1 p_0 - t_0 b_{11}^{(1)} + t_0 p_1) \alpha_{0j}^2 + \\ + (m_0 (b_{11}^{(0)} - p_0) - t_0^2) \operatorname{ctg}^2 \theta_0 = 0.$$

Напряжения $\sigma_{\phi\phi}^{(2)}, \sigma_{\rho\rho}^{(2)}$ относительно ε имеют порядок $O(1)$, $\sigma_{\theta\theta}^{(2)}$ — порядок $O(\varepsilon)$, а $\sigma_{\rho\theta}^{(2)} = O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right)$.

Решения (6), соответствующие третьему итерационному процессу, отыскиваем в виде

$$a = \varepsilon (a_{30} + \varepsilon a_{31} + \dots), \quad c = \varepsilon (c_{30} + \varepsilon c_{31} + \dots), \\ z = \varepsilon^{-1} (\beta_0 + \varepsilon \beta_1 + \dots). \quad (11)$$

После подстановки (11) в (6) для первых членов разложения получаем спектральную задачу, описывающую потенциальное решение трансверсально-изотропной плиты, неоднородной по толщине [7]

$$L(\beta_0) \mathbf{w}_0 = \{ l_0(\beta_0) \mathbf{w}_0; t(\beta_0) \mathbf{w}_0 |_{\eta=\pm 1} = \mathbf{0} \} = \mathbf{0}, \quad (12)$$

$$l_0(\beta_0) = L_{00} + \beta_0 L_{10} + \beta_0^2 L_2,$$

$$t(\beta_0) = M_{00} + \beta_0 M_1, \mathbf{w}_0 = (a_{30}; c_{30})^T,$$

$$L_{00} = \begin{vmatrix} \partial(b_{44}\partial) & 0 \\ 0 & \partial(b_{22}\partial) \end{vmatrix},$$

$$L_{10} = \begin{vmatrix} 0 & \partial(b_{44}) + b_{12}\partial \\ \partial(b_{12}) + b_{44}\partial & 0 \end{vmatrix},$$

$$M_{00} = \begin{vmatrix} b_{44}\partial & 0 \\ 0 & b_{22}\partial \end{vmatrix}.$$

При помощи замены $a_{30} = \beta_0^{-2} g_0 f'' - g_1 f$, $c_{30} = -\beta_0^{-3} (g_0 f'')' + \beta_0^{-1} g_2 f' + \beta_0^{-1} (g_1 f)'$ спектральная задача (12) сводится к следующей:

$$\begin{cases} (g_0 f'')'' - \beta_0^2 [(g_1 f)'' + g_1 f'' + (g_2 f)'] + \beta_0^4 g_3 f = 0, \\ f'|_{\eta=\pm 1} = 0, \beta_0 f|_{\eta=\pm 1} = 0, \end{cases} \quad (13)$$

$$\text{где } g_1 = \frac{b_{12}}{b_{12}^2 - b_{11}b_{22}}, g_2 = b_{44}^{-1}, g_3 = \frac{b_{11}}{b_{12}^2 - b_{11}b_{22}}.$$

Система (13) является обобщением спектральной задачи П.Ф. Папковича на неоднородный трансверсально-изотропный случай [8, 9].

Решения, соответствующие третьему итерационному процессу, имеют вид

$$\begin{aligned} u_\rho^{(3)}(\rho; \eta) &= \varepsilon \rho^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} D_k \times \\ &\times [\beta_{0k}^{-2} g_0 f_k'' - g_1 f_k + O(\varepsilon)] \exp\left(\left(\frac{\beta_{0k}}{\varepsilon} + \beta_{1k}\right) \ln \rho\right), \\ u_\theta^{(3)}(\rho; \eta) &= \varepsilon \rho^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} D_k \times \\ &\times \left[-\beta_{0k}^{-3} (g_0 f_k'')' + \beta_{0k}^{-1} g_2 f_k' + \beta_{0k}^{-1} (g_1 f_k)'\right] + O(\varepsilon) \times \\ &\times \exp\left(\left(\frac{\beta_{0k}}{\varepsilon} + \beta_{1k}\right) \ln \rho\right). \end{aligned} \quad (14)$$

Общее решение (6) будет суперпозицией решений (7), (10), (14), соответствующих вышеприведенным итерационным процессам $u_\rho = u_\rho^{(1)} + u_\rho^{(2)} + u_\rho^{(3)}$, $u_\theta = u_\theta^{(1)} + u_\theta^{(2)} + u_\theta^{(3)}$.

Определяем характер построенных однородных решений. Перемещения представим в виде

$$\begin{aligned} u_\rho(\rho, \eta) &= u_\rho^{(1)}(\rho, \eta) + \sum_{k=1}^{\infty} E_k \rho^{z_k - \frac{1}{2}} a_k(\eta), \\ u_\theta(\rho, \eta) &= u_\theta^{(1)}(\rho, \eta) + \sum_{k=1}^{\infty} E_k \rho^{z_k - \frac{1}{2}} c_k(\eta). \end{aligned} \quad (15)$$

Во второе слагаемое включены перемещения, определяемые вторым и третьим итерационными

процессами. Для напряжений имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho} &= \sigma_{\rho\rho}^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} E_k \rho^{z_k - \frac{3}{2}} Q_k(\eta), \\ \sigma_{\rho\theta} &= \sigma_{\rho\theta}^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} E_k \rho^{z_k - \frac{31}{2}} T_k(\eta). \end{aligned} \quad (16)$$

$$Q_k(\eta) = \left(z_k - \frac{1}{2}\right) b_{11} a_k(\eta) + b_{12} \left(c_k(\eta) \operatorname{ctg}(\theta_0 + \varepsilon \eta) + 2a_k(\eta) + \frac{1}{\varepsilon} c_k'(\eta)\right),$$

$$T_k(\eta) = b_{44} \left(\frac{1}{\varepsilon} a_k'(\eta) + \left(z_k - \frac{3}{2}\right) c_k(\eta)\right).$$

Изучаем связь однородных решений с величиной главного вектора P напряжений, действующих в сечении $\rho = \text{const}$. Отметим, что

$$\begin{aligned} P &= 2\pi \rho^2 \varepsilon \int_{-1}^1 (\sigma_{\rho\rho} \cos(\theta_0 + \varepsilon \eta) - \sigma_{\rho\theta} \sin(\theta_0 + \varepsilon \eta)) \times \\ &\times \sin(\theta_0 + \varepsilon \eta) d\eta. \end{aligned} \quad (17)$$

$$\text{Подставляя (16) в (17), окончательно получаем } P = 2\pi \varepsilon A \omega_0, \quad (18)$$

$$\text{где } \omega_0 = (m_0 p_0 - m_0 b_{11}^{(0)} + t_0^2) \cos^2 \theta_0 + O(\varepsilon).$$

Таким образом, напряженное состояние, соответствующее второму и третьему итерационным процессам, является самоуравновешенным в каждом сечении $\rho = \text{const}$.

Решение (7), соответствующее первому итерационному процессу, определяет внутреннее напряженно-деформированное состояние конической оболочки. Первые члены его разложения по ε определяют безмоментное напряженное состояние. Решение (10) имеет характер краевого эффекта. Главные части изгибающего момента и перерезывающей силы определяют решение соответствующего второго итерационного процесса. Первые члены разложения по ε решения (10) в совокупности с первыми членами (7) можно рассматривать как решения по прикладной теории оболочек. Решения (14) имеют характер пограничного слоя. Первые члены (14) эквивалентны краевому эффекту Сен-Венана неоднородной трансверсально-изотропной плиты. Для мнимых β_{0k} погранслоное решение затухает весьма слабо. В этом случае напряженно-деформированное состояние трансверсально-изотропной и изотропной оболочек качественно отличается. Когда β_{0k} — действительные или комплексные, общая картина напряженно-деформированного состояния в качественном отношении аналогична соответствующей картине для изотропных неоднородных конических оболочек [2], и они различаются скоростью затухания погранслоев Сен-Венана.

Пусть на сферической части границы оболочки заданы граничные условия

$$\sigma_{\rho\rho}|_{\rho=\rho_s} = f_{1s}(\eta), \quad \sigma_{\rho\theta}|_{\rho=\rho_s} = f_{2s}(\eta), \quad (s=1;2) \quad (19)$$

где $f_{1s}(\eta)$, $f_{2s}(\eta)$ ($s=1,2$) – достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям равновесия.

Как было показано, несамобалансированную часть нагрузки (19) можно снять при помощи проникающего решения (7), и связь постоянной A с величиной главного вектора P дается равенством (18). Решение отыскиваем в виде (15). Для определения констант E_k на основании вариационного принципа Лагранжа получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=1}^{\infty} F_{jk} E_k = \Delta_j \quad (j=1,2,\dots), \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} F_{jk} &= (\rho_1^{z_k+z_j} + \rho_2^{z_k+z_j}) \times \\ &\times \int_{-1}^1 (Q_k(\eta) a_j(\eta) + T_k(\eta) c_j(\eta)) \sin(\theta_0 + \varepsilon \eta) d\eta, \\ \Delta_j &= \sum_{s=1}^2 \rho_s^{z_j+\frac{3}{2}} \int_{-1}^1 (\gamma_{1s}(\eta) a_j(\eta) + \gamma_{2s}(\eta) c_j(\eta)) \sin(\theta_0 + \varepsilon \eta) d\eta, \\ \gamma_{1s}(\eta) &= f_{1s}(\eta) - \frac{A}{\rho_s^2} \left[\frac{m_0}{g_0} + t_0 \chi_2 + O(\varepsilon) \right] \operatorname{ctg} \theta_0, \\ \gamma_{2s}(\eta) &= f_{2s}(\eta) + \frac{A\varepsilon}{\rho_s^2} \operatorname{ctg} \theta_0 \times \\ &\times \left[-m_0 \int_{-1}^{\eta} \chi_2 dx + t_0 \int_{-1}^{\eta} \chi_1 dx + O(\varepsilon) \right]. \end{aligned}$$

Система (20) всегда разрешима при физических осмысленных условиях, наложенных на правую часть [4]. Используя малость параметра ε , построим асимптотические решения системы (20).

Учитывая, что $\sigma_{\rho\rho}^{(2)} = O(1)$, $\sigma_{\rho\theta}^{(2)} = O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$, уточ-

ним предположения относительно внешней нагрузки. Допустим, что $f_{1s} = O(1)$.

На основе (10), (14)

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sigma_{\rho\rho} d\eta &= \varepsilon^{\frac{1}{2}} \rho^{-\frac{3}{2}} \sum_{j=1}^4 B_j \left\{ \alpha_{0j} (b_{11}^{(0)} - p_0) q_j \alpha_{0j} \times \right. \\ &\times \left[\alpha_{0j}^2 (b_{11}^{(0)} - b_{11}^{(2)} - p_0 + p_2) + (t_0 - t_1) \operatorname{ctg} \theta_0 \right] + \\ &+ \alpha_{0j}^2 q_j^2 (p_0 - p_1 - b_{11}^{(0)} + b_{11}^{(1)}) + O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right) \left. \right\} \exp\left(\frac{\alpha_{0j}}{\sqrt{\varepsilon}} \ln \rho\right). \quad (21) \end{aligned}$$

Касательные напряжения, заданные на сферических частях границы, представим в виде

$$f_{2s} = f_{2s}^{(1)} + f_{2s}^{(2)}, \quad f_{2s}^{(1)} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f_{2s} d\eta, \quad f_{2s}^{(2)} = f_{2s} - f_{2s}^{(1)}.$$

На основании (21) получаем, что $f_{2s}^{(1)} = O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$.

Таким образом,

$$f_{1s} = O(1), \quad f_{2s}^{(1)} = O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right), \quad f_{2s}^{(2)} = O(1). \quad (22)$$

Неизвестные постоянные B_j, D_k отыскиваем в виде

$$B_j = B_{j0} + \varepsilon^{\frac{1}{2}} B_{j1} + \dots, \quad D_k = D_{k0} + \varepsilon D_{k1} + \dots. \quad (23)$$

После подстановки (23) в (20) с учетом (22) получаем

$$\sum_{j=1}^4 m_{jk} B_{j0} = h'_k, \quad (k=1,4), \quad (24)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_{kn} D_{n0} = h''_k, \quad (k=1,2,\dots), \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} m_{kj} &= \left[\alpha_{0j} \alpha_{0k}^2 (b_{11}^{(0)} - p_0) (p_0 + p_1 - b_{11}^{(0)} - b_{11}^{(1)}) q_k q_j^2 + \right. \\ &+ \alpha_{0k} \alpha_{0j}^2 (b_{11}^{(0)} - p_0)^2 \tau_{2j} q_k q_j + \\ &+ \alpha_{0k} \alpha_{0j}^2 (b_{11}^{(0)} - p_0) (p_0 - p_1 - b_{11}^{(0)} + b_{11}^{(1)}) q_k q_j^2 - \\ &\left. - \alpha_{0j} \alpha_{0k}^2 (b_{11}^{(0)} - p_0)^2 \tau_{1j} q_k q_j \right] \sum_{s=1}^2 \exp\left(\frac{(\alpha_{0k} + \alpha_{0j})}{\sqrt{\varepsilon}} \ln \rho_s\right), \\ h'_k &= \sum_{s=1}^2 \rho_s^{3/2} \int_{-1}^1 \left[\gamma_{1s}^{(0)}(\eta) \left[\alpha_{0k}^2 q_k (p_0 - b_{11}^{(0)}) (\eta + 1) + q_k^2 \right] + f_{2s}^{(1)}(\eta) \times \right. \\ &\times \alpha_{0k} q_k (b_{11}^{(0)} - p_0) \left. \right] d\eta \exp\left(\frac{\alpha_{0k}}{\sqrt{\varepsilon}} \ln \rho_s\right), \\ \tau_{1j} &= \alpha_{0j}^2 (p_2 + 2p_1 + p_0 - b_{11}^{(2)} - 2b_{11}^{(1)} - b_{11}^{(0)}) - (t_0 + t_1) \operatorname{ctg} \theta_0, \\ \tau_{2j} &= \alpha_{0j}^2 (b_{11}^{(0)} - b_{11}^{(2)} - p_0 + p_2) + (t_0 - t_1) \operatorname{ctg} \theta_0, \\ g_{kn} &= \int_{-1}^1 \left\{ -\alpha_{0n}^{-1} f_n'' \left[\alpha_{0k}^{-2} g_0 f_k'' - g_1 f_k \right] + \right. \\ &+ f_n' \left[\alpha_{0k}^{-1} (g_1 f_k)' + \alpha_{0k}^{-1} g_2 f_k' - \alpha_{0k}^{-3} (g_0 f_k'')' \right] \left. \right\} d\eta \times \\ &\times \sum_{s=1}^2 \exp\left(\left(\alpha_{1n} + \alpha_{1k} + \frac{(\alpha_{0n} + \alpha_{0k})}{\varepsilon} \right) \ln \rho_s\right), \\ h''_k &= \sum_{s=1}^2 \rho_s^{3/2} \exp\left(\left(\frac{\alpha_{0k}}{\varepsilon} + \alpha_{1k} \right) \ln \rho_s\right) \times \\ &\times \int_{-1}^1 \left\{ \gamma_{1s}^{(0)}(\eta) \left[\alpha_{0k}^{-2} g_0 f_k'' - g_1 f_k \right] + f_{2s}(\eta) \times \right. \\ &\times \left[-\alpha_{0k}^{-3} (g_0 f_k'')' + \alpha_{0k}^{-1} g_2 f_k' + \alpha_{0k}^{-1} (g_1 f_k)' \right] \left. \right\} d\eta, \\ \gamma_{1s}^{(0)}(\eta) &= f_{1s}(\eta) - \frac{A}{\rho_s^2} \left[\frac{m_0}{g_0} + t_0 \chi_2 \right] \operatorname{ctg} \theta_0. \end{aligned}$$

В [9, 10] была доказана разрешимость и сходимость метода редукции для системы (25).

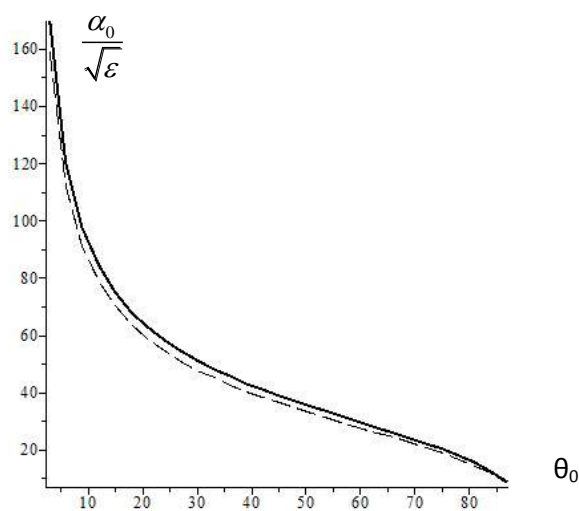
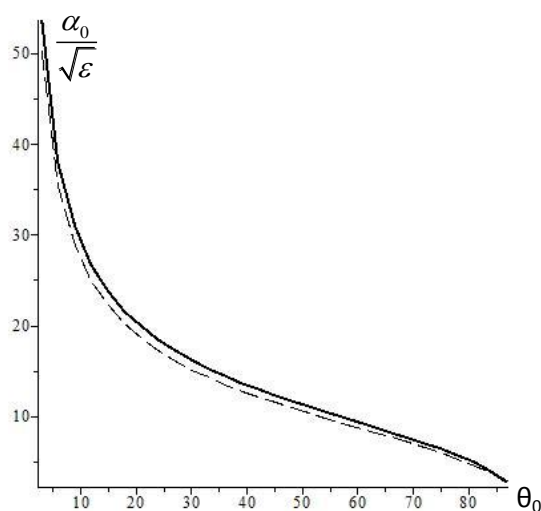
Определение B_{jp}, D_{kp} ($p=1,2,\dots$) неизменно сводится к обращению одних и тех же матриц, которые совпадают с матрицами системы (24), (25).

Замечание. При $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ срединная поверхность конической оболочки вырождается в плоскость, и случай $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ соответствует неоднородной плите переменной толщины [3, 4]. Этот случай вырождения особый и требует отдельного исследования.

Проведем расчет показателя изменяемости краевого эффекта для кадмия (Cd) при неоднородности вида $b_{11}(\eta) = k_{11}e^{\frac{\eta}{2}}, b_{22}(\eta) = k_{22}e^{\frac{\eta}{2}}, b_{12}(\eta) = k_{12}e^{\frac{\eta}{2}},$

$b_{23}(\eta) = k_{23}e^{\frac{\eta}{2}}$ со следующими параметрами [11]: $k_{11} = 5,13 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2, k_{12} = 4,42 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2, k_{22} = 12,1 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2, k_{23} = 4,81 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2.$

Из рисунка видно, что с уменьшением угла раствора срединной поверхности и толщины оболочки показатель изменяемости краевого эффекта возрастает (увеличивается скорость затухания краевого эффекта). По сравнению с однородным трансверсально-изотропным конусом в неоднородном показатель изменяемости краевого эффекта увеличивается. Это означает, что для неоднородных конических оболочек краевой эффект затухает быстрее, чем в однородных конических оболочках.



а — — — однородный материал оболочки;

б — — — неоднородный материал оболочки

Зависимости показателей изменяемости краевого эффекта $\frac{\alpha_0}{\sqrt{\epsilon}}$

от угла конусности срединной поверхности θ_0 при: а — $\epsilon=0,01$; б — $\epsilon=0,001$

Литература

1. Мехтиев М.Ф., Устинов Ю.А. Асимптотическое исследование решения задачи теории упругости для полого конуса // Прикладная математика и механика. 1971. Т. 35, № 6. С. 1108 – 1115.
2. Ахмедов Н.К., Мехтиев М.Ф. Анализ трехмерной задачи теории упругости для неоднородного усеченного полого конуса // Прикладная математика и механика. 1993. Т. 57, № 5. С. 113 – 119.
3. Ахмедов Н.К., Мехтиев М.Ф. Осесимметричная задача теории упругости для неоднородной плиты переменной толщины // Прикладная математика и механика. 1995. Т. 59, № 3. С. 518 – 523.

4. Мехтиев М.Ф. Метод однородных решений в анизотропной теории оболочек. Баку, 2009. 334 с.
5. Ахмедов Н.К., Устинов Ю.А. Некоторые задачи теории упругости для сильно неоднородных слоистых пластин и оболочек // Актуальные аспекты физико-механических исследований. Механика. Киев, 2007. С. 48 – 61.
6. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории оболочек при помощи асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // Прикладная математика и механика. 1963. Т. 27, № 4. С. 593 – 608.
7. Ахмедов Н.К., Акперова С.Б. Асимптотический анализ трехмерной задачи теории упругости для ра-

диально-неоднородного transversально-изотропного полого цилиндра // Механика твердого тела. 2011. № 4. С. 170 – 180.

8. Ворович И.И., Кадомцев И.Г., Устинов Ю.А. К теории неоднородных по толщине плит // Механика твердого тела. 1975. № 3. С. 119 – 129.

9. Устинов Ю.А. Математическая теория поперечно-неоднородных плит. Ростов н/Д., 2006. 257 с.

10. Устинов Ю.А., Юдович В.И. О полноте системы элементарных решений бигармонического уравнения в полуполосе // Прикладная математика и механика. 1973. Т. 37, № 4. С. 706 – 714.

11. Хантингтон Г. Упругие постоянные кристаллов // Успехи физ. наук. 1961. Вып. 3, № 74. С. 461 – 520.

References

1. Mekhtiev M.F., Ustinov Yu.A. Asimptoticheskoe issledovanie resheniya zadachi teorii uprugosti dlya pologo konusa [Asymptotic analysis of the solution of the elasticity problem for a hollow cone]. Prikladnaya matematika i mekhanika, 1971, vol. 35, no 6, pp. 1108-1115.

2. Akhmedov N.K., Mekhtiev M.F. Analiz trekhmernoi zadachi teorii uprugosti dlya neodnorodnogo usechennogo pologo konusa [Analysis of the three-dimensional problem of elasticity theory for an inhomogeneous truncated hollow cone]. Prikladnaya matematika i mekhanika, 1993, vol. 57, no 5, pp. 113-119.

3. Akhmedov N.K., Mekhtiev M.F. Osesimmetrichnaya zadacha teorii uprugosti dlya neodnorodnoi plity peremennoi tolshchiny [Axisymmetric task of elasticity theory for an inhomogeneous plates of variable thickness]. Prikladnaya matematika i mekhanika, 1995, vol. 59, no 3, pp. 518-523.

4. Mekhtiev M.F. Metod odnorodnykh reshenii v anizotropnoi teorii obolochek [The method of homogeneous

solutions in the theory of anisotropic shells]. Baku, 2009, 334 p.

5. Akhmedov N.K., Ustinov Yu.A. [Some problems in the theory of elasticity for a strongly inhomogeneous layered plates and shells]. Aktual'nye aspekty fiziko-mekhanicheskikh issledovaniy. Mekhanika [Actual aspects of the physical and mechanical studies. Mechanics]. Kiev, 2007, pp. 48-61.

6. Gol'denveizer A.L. Postroenie priblizhennoi teorii obolochek pri pomoshchi asimptoticheskogo integrirvaniya uravnenii teorii uprugosti [An approximate theory of shells by means of asymptotic integration of the equations of the theory of elasticity]. Prikladnaya matematika i mekhanika, 1963, vol. 27, no 4, pp. 593-608.

7. Akhmedov N.K., Akperova S.B. Asimptoticheskii analiz trekhmernoi zadachi teorii uprugosti dlya radial'no-neodnorodnogo transversal'no-izotropnogo pologo tsilindra [The asymptotic analysis of three-dimensional problem of elasticity for radially inhomogeneous transversely isotropic hollow cylinder]. Mekhanika tverdogo tela, 2011, no 4, pp. 170-180.

8. Vorovich I.I., Kadomtsev I.G., Ustinov Yu.A. K teorii neodnorodnykh po tolshchine plit [The theory of nonuniform thickness of plates]. Mekhanika tverdogo tela, 1975, no 3, pp. 119-129.

9. Ustinov Yu.A. Matematicheskaya teoriya poperechno-neodnorodnykh plit [The mathematical theory of cross-inhomogeneous plates]. Rostov-on-Don, 2006, 257 p.

10. Ustinov Yu.A., Yudovich V.I. O polnote sistemy elementarnykh reshenii bigarmonicheskogo uravneniya v polupolose [Completeness of the system of elementary solutions of the biharmonic equation in a half-strip]. Prikladnaya matematika i mekhanika, 1973, vol. 37, no 4, pp. 706-714.

11. Khantington G. Uprugie postoyannye kristallov [The elastic constants of crystals]. Uspekhi fiz. nauk, 1961, vol. 3, № 74, pp. 461-520.

УДК 536.22

ВЛИЯНИЕ НАНОЧАСТИЦ НА ПЕРЕНОС ТЕПЛА В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ МАРАНГОНИ С ВНЕШНИМ ПОТОКОМ

© 2015 г. В.А. Батищев, Ю.С. Николаенко, А.С. Пискунов

Батищев Владимир Андреевич – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра теоретической и компьютерной гидродинамики, Институт математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов н/Д, 344090, e-mail: batish@math.sfedu.ru

Batishchev Vladimir Andreevich – Doctor of Physical and Mathematical Science, Professor, Department of Theoretical and Computer Fluid Dynamics, Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences of the Southern Federal University, Milchakov St., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: batish@math.sfedu.ru.

Николаенко Юрий Сергеевич – аспирант, Институт математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов н/Д, 344090, e-mail: yur-nikolaenko@yandex.ru

Nikolaenko Yuri Sergeevich – Post-Graduate Student, Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences of the Southern Federal University, Milchakov St., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: yur-nikolaenko@yandex.ru

Пискунов Андрей Сергеевич – магистр, Институт математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов н/Д, 344090, e-mail: vnikaget@gmail.com

Piskunov Andrei Sergeevich – Master Student, Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences of the Southern Federal University, Milchakov St., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: vnikaget@gmail.com

Рассчитан тепловой поток на свободной поверхности жидкости с наночастицами при малых диффузионных коэффициентах вязкости и температуропроводности. Предполагается, что жидкость занимает полубесконечное пространство, ограниченное недеформируемой свободной границей, вблизи которой формируется тонкий пограничный слой Марангони. Исследована плоская стационарная задача, причем поле скоростей симметрично относительно вертикальной оси. Термокапиллярное течение жидкости вызвано неравномерным нагревом свободной границы в случае, когда при удалении от оси симметрии свободная граница охлаждается. Показано, что для конечного значения скорости внешнего течения тепловой поток увеличивается с ростом как скорости этого течения, так и концентрации наночастиц. Однако для отдельных видов наночастиц при малой скорости внешнего течения тепловой поток может как убывать, так и возрастать с увеличением концентрации наночастиц.

Ключевые слова: наночастицы, эффект Марангони, свободная граница, пограничный слой, внешний поток.

Calculated heat flux at the free fluid surface with nanoparticles. Fluid flow caused by the nonuniform heating of the free boundary when the boundary is cooled at a distance from the axis of symmetry. It is shown that in the planar case the heat flux increases with increasing speed of the external flow and with increasing concentrations of nanoparticles. However, for certain types of nanoparticles at low external flow velocity the heat flux may either decrease or increase with increasing concentration of nanoparticles.

Keywords: nanoparticles, effect of Marangoni, free surface, boundary layer, outer stream.

Увеличение потока тепла в жидкости является одной из важных проблем в технических приложениях. Одним из способов усиления передачи тепла является помещение в базовую жидкость частиц металлов, так как теплопроводность ряда металлов в сотни раз превосходит теплопроводность отдельных жидкостей. Эту идею развивал Максвелл в конце XIX в., поместив в жидкость частицы микронных размеров. Однако в то время этот метод не получил развития, так как происходило быстрое осаждение металлических частиц, возникали заторы в микроканалах, появлялась поверхностная эрозия, возникали и другие проблемы. В 1995 г. в работе [1] S. Choi и J. Estman ввели термин «наножидкость», который применяется к жидкости с наночастицами, имеющими размеры

менее 50 нм. Оказалось, что тепловой поток в наножидкости можно увеличить на десятки процентов по сравнению с базовой жидкостью. В качестве наночастиц применяются химически устойчивые металлы и их оксиды, базовых жидкостей – вода, полимерные растворы, органические жидкости, такие как этиленгликоль, масло, биологические жидкости. Отметим, что наножидкости можно отнести к коллоидным растворам, которые несколько последних десятилетий изучает коллоидная химия. Физические свойства наножидкостей стали изучаться сравнительно недавно ввиду их особых свойств переноса. Отметим, что каналы, по которым движутся наножидкости, почти не подвергаются эрозии, наночастицы почти не седиментируют. Наножидкости применяются для охлаждения в технологических

процессах, в системах производства и передачи энергии, в химических процессах, при очистке воды, при создании смазочных материалов, в медицине.

В течение последних двух десятилетий проведены многочисленные расчеты тепловых потоков при конвективном движении жидкости с наночастицами. Расчеты проводились на основе однофазной и двухфазной моделей, а результаты исследований отражены в ряде обзоров [2–4]. Имеющиеся экспериментальные данные подтверждены результатами численных расчетов по этим моделям [4].

Перенос тепла в слоях Марангони с наночастицами изучался в ряде статей, в том числе и в работе [5].

В данной статье рассчитан перенос тепла через свободную поверхность в область пограничного слоя Марангони в плоском стационарном случае при наличии внешнего течения. Получена зависимость теплового потока как от концентрации наночастиц, так и от скорости внешнего течения.

Уравнения модели

Рассматривается плоское стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости в пограничном слое Марангони вблизи недеформируемой свободной границы Γ , вдоль которой задано неравномерное распределение температуры, вызывающей термокапиллярное течение. Вне пограничного слоя жидкость заполняет полубесконечное пространство. Предполагается, что скорость жидкости во внешней области имеет такой же порядок, как и в пограничном слое. В главном приближении течение жидкости вне пограничного слоя описывается уравнениями движения идеальной жидкости. Рассматриваются случаи, когда жидкость содержит наночастицы меди, либо оксида алюминия, или оксида титана. В расчетах применяется однофазная модель наножидкости, причем в качестве базовой жидкости используется вода. Предполагается, что базовая жидкость и наночастицы находятся в термодинамическом равновесии. Скольжение между наночастицами и базовой жидкостью отсутствует. Теплофизические параметры смеси считаются постоянными. Рассматриваются сферические наночастицы одинакового размера. В рассматриваемой модели уравнения движения жидкости получаются из системы Навье – Стокса путем замены физических параметров на их эффективные значения [3–5]

$$(\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} = -\rho_{nf}^{-1} \nabla p + \mu_{nf} \rho_{nf}^{-1} \nabla^2 \mathbf{v},$$

$$(\mathbf{v}, \nabla) T = \chi_{nf} \nabla^2 T, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Здесь $\mathbf{v} = (v_x, 0, v_z)$ – вектор скорости; p – давление; T – температура; (x, y, z) – декартовы координаты. Скорость, давление и температура жидкости симметричны относительно вертикальной

оси Oz и не зависят от координаты y . Параметры ρ_{nf} , μ_{nf} , χ_{nf} – соответственно плотность, динамический коэффициент вязкости и коэффициент температуропроводности жидкости с наночастицами. Коэффициент поверхностного натяжения считается линейно зависящим от температуры: $\sigma = \sigma_0 - |\sigma_T|(T - T_*)$, где σ_0 , $|\sigma_T|$, T_* – известные постоянные. Свободная граница считается недеформируемой. В качестве краевых условий на свободной поверхности используются: а) динамическое условие для касательных напряжений; б) кинематическое условие; в) температура свободной границы Γ $2\mu_{nf}(\Pi \mathbf{n} - (\mathbf{n} \Pi \mathbf{n}) \mathbf{n}) = \nabla_\Gamma \sigma$,

$$\mathbf{v} \mathbf{n} = 0, \quad T = T_\Gamma(x, z), \quad (x, z) \in \Gamma.$$

Здесь Π – тензор скоростей деформации; \mathbf{n} – вектор внешней нормали к свободной границе Γ ; ∇_Γ – градиент вдоль Γ ; T_Γ – заданная температура свободной границы. Предположим, что температура свободной поверхности в окрестности оси симметрии на отрезке длиной L изменяется по степенному закону $T = T_\infty - \Delta T(x/L)^{n+1}$. Здесь $\Delta T = \text{const}$ – разность температур. При $z \rightarrow -\infty$ температура жидкости вне Γ стремится к постоянному значению T_∞ , а поле скоростей ограничено.

В уравнениях движения и краевых условиях переходим к безразмерным переменным, выбрав в качестве масштабов длины, скорости, давления и температуры параметры L , U_m , σ_0/L , $A_T L$. Здесь A_T – масштаб градиента температуры вдоль Γ ; $U_m = (|\sigma_T|^2 A_T^2 L \rho_f^{-2} \nu_f^{-1})^{1/3}$. Параметры ρ_f , ν_f – плотность и кинематический коэффициент вязкости базовой жидкости. Введем малый параметр по формуле $\varepsilon = (\rho_f \nu_f^2 |\sigma_T|^{-1} L^2 A_T^{-1})^{1/3}$. Он определяет порядок толщины пограничного слоя вблизи свободной границы.

Обозначим через k_{nf} , k_f соответственно коэффициенты теплопроводности наножидкости и базовой жидкости. Параметры жидкости с наночастицами ρ_{nf} , μ_{nf} , χ_{nf} , k_{nf} выразим через соответствующие параметры базовой жидкости ρ_f , μ_f , k_f и параметры частиц металлов – плотность ρ_s и коэффициент теплопроводности k_s по известным формулам [6, 7] $\rho_{nf} = (1 - \phi)\rho_f + \phi\rho_s$,

$$\mu_{nf} = \mu_f (1 - \phi)^{-5/2}, \quad \chi_{nf} = k_{nf} / (\rho c_p)_{nf},$$

$$(\rho c_p)_{nf} = (1 - \phi)(\rho c_p)_f + \phi(\rho c_p)_s.$$

Здесь ϕ – объемная концентрация наночастиц в смеси. Коэффициент k_{nf} определяется по формуле

$$[8] \quad k_{nf} = k_f \frac{k_s + 2k_f - 2\phi(k_f - k_s)}{k_s + 2k_f + \phi(k_f - k_s)}.$$

Отметим, что в ряде публикаций рассматривается зависимость физических параметров от температуры. Коэффициент динамической вязкости наножидкости приведен в работе [6], опубликованной Н.С. Brinkman в 1952 г.

Асимптотический метод

Начало системы координат поместим на ось симметрии на свободной поверхности, тогда уравнение этой границы представим в виде $z = 0$. Решение задачи строим методом пограничного слоя. В области пограничного слоя введем преобразование растяжения $z = \varepsilon s$. Отметим, что $s \leq 0$. Учитывая, что скорость жидкости в области пограничного слоя D_Γ имеет такой же порядок, как и вне D_Γ , асимптотические разложения при $\varepsilon \rightarrow 0$ решения задачи строим в виде рядов по степеням параметра ε [9, 10]

$$v_x = v_{x0} + h_{x0} + \varepsilon(h_{x1} + v_{x1}) + \dots,$$

$$v_z = v_{z0} + \varepsilon(h_{z1} + v_{z1}) + \dots,$$

$$T = T_\infty + \theta_0 + \varepsilon(T_1 + \theta_1) + \dots$$

Аналогичный ряд записываем и для давления. Функции $v_{x0}, v_{x1}, v_{z0}, v_{z1}, T_1$ зависят от координат x, z и определены во всей области течения; $h_{x0}, h_{x1}, h_{z1}, \theta_0, \theta_1$ зависят от переменных s, x , локализованы в области пограничного слоя D_Γ и исчезают вне D_Γ при $s \rightarrow -\infty$.

При выводе уравнений пограничного слоя асимптотические разложения подставляем в уравнения движения, в крайевые условия и переходим к переменным s, x . Приравниваем к нулю сумму коэффициентов при одинаковых степенях параметра ε . В результате получаем систему уравнений для главных членов асимптотических рядов. Введем новые неизвестные функции H_x, H_z по формулам $H_x = h_{x0} + v_{x0}|_\Gamma, H_z = h_{z1} + v_{z1}|_\Gamma + s \partial v_{z0} / \partial z|_\Gamma$. Функции H_x, H_z, θ_0 удовлетворяют системе уравнений

$$H_x \frac{\partial H_x}{\partial x} + H_z \frac{\partial H_x}{\partial s} = A \frac{\partial^2 H_x}{\partial s^2} + v_{x0} \frac{\partial v_{x0}}{\partial x} \Big|_\Gamma, \quad (1)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_z}{\partial s} = 0, \quad H_x \frac{\partial \theta_0}{\partial x} + H_z \frac{\partial \theta_0}{\partial s} = \frac{B}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial s^2}.$$

Краевые условия имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-\phi)^{5/2}} \frac{\partial H_x}{\partial s} &= -\frac{\partial T_\Gamma}{\partial x}, \\ H_z &= 0, \quad \theta_0 = T_\Gamma - T_\infty \quad (s = 0), \\ H_x &\rightarrow v_{x0}|_\Gamma, \quad \theta_0 \rightarrow 0 \quad (s \rightarrow -\infty). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $\text{Pr} = \nu / \chi$ – число Прандтля базовой жидкости. Коэффициенты A, B выражаются через теплофизические параметры базовой жидкости (индекс f) и параметры наночастиц (индекс s)

$$A = D(1-\phi)^{-5/2}, \quad D = (1-\phi + \phi \rho_f / \rho_s)^{-1},$$

$$B = D \frac{k_s / k_f + 2 - 2\phi(1 - k_s / k_f)}{k_s / k_f + 2 + \phi(1 - k_s / k_f)}.$$

Учитываем, что температура свободной границы ($z = 0$) в безразмерных переменных изменяется по степенному закону $T_\Gamma = T_\infty - x^{n+1}$, т.е. температура убывает вдоль Γ при удалении от начала координат.

Краевая задача (1), (2) допускает автомодельное решение. Введем переменную $\xi = -sx^{(n+1)/3}$. Известные функции найдем методом разделения переменных $H_x = x^{(2n+1)/3} F'(\xi), \theta_0 = -x^{n+1} \theta(\xi),$

$$H_z = x^{(n-1)/3} ((n+2)F + (n-1)\xi F') / 3.$$

Предположим, что скорость идеальной жидкости на свободной границе вблизи начала координат зависит степенным образом от продольной координаты по закону $v_{x0}|_\Gamma = U x^{(2n+1)/3}$. Такое распределение скорости может быть вызвано вихревым течением жидкости вблизи свободной границы.

Функции F, θ определяются из краевой задачи

$$3AF''' = (2n+1)F'^2 - (n+2)FF'' - (2n+1)U^2, \quad (3)$$

$$\text{Pr}^{-1} B \theta'' = (n+1)\theta F' - (n+2)F \theta' / 3,$$

$$F(0) = 0, \quad F''(0) = -(n+1)(1-\phi)^{5/2}, \quad \theta(0) = 1,$$

$$F'(\infty) = U, \quad \theta(\infty) = 0.$$

После численного решения задачи (3) вычисляем тепловой поток через свободную границу $q_\Gamma = -k_{nf} \partial T / \partial z (z=0)$. Локальное число Нуссельта определяем по формуле $Nu = -\varepsilon^{-1} k_{nf} k_f^{-1} x^{(n+2)/3} \theta'(0)$.

Результаты расчетов

Краевая задача (3) решалась численно методом пристрелки. При отсутствии наночастиц в жидкости ($\phi = 0, A = B = 1$) и внешнего потока ($U = 0$) решение задачи в осесимметричном случае найдено в работе [9]. Отметим, что при $n = 4, U = 0$ система (3) допускает точное решение для функции F , зависящее от переменной ξ по экспоненциальному закону, однако температура должна определяться численно. В данной работе в качестве базовой жидкости рассматривалась вода. При проведении расчетов использовались 3 вида наночастиц – медь (Cu), оксид алюминия (Al_2O_3) и оксид титана (TiO_2). Объемная концентрация наночастиц, соответствующая параметру ϕ , изменялась в проме-

жутке от нуля до значения 0,2. Численные значения термодинамических параметров k , μ , ρ и c_p для наножидкости и воды, а также параметры ρ_s , k для меди и оксидов алюминия и титана приведены в работе [5].

Численные расчеты проводились для $n = 0$, т.е. при постоянном градиенте температуры вдоль свободной границы. Рассчитывался параметр $N = -k_{nf} k_f^{-1} \theta'(0)$, который, как и число Нуссельта, пропорционален потоку тепла на свободной границе. Результаты численных расчетов показали, что продольная компонента скорости в пограничном слое изменяется монотонно поперек слоя. Температура жидкости монотонно возрастает поперек пограничного слоя при удалении от свободной границы и стремится к пределу T_∞ при выходе из области пограничного слоя. На рис. 1 изображена зависимость «приведенного» теплового потока N от концентрации наночастиц при скорости внешнего потока $U = 5$. Сплошная линия соответствует наночастицам меди, пунктир – оксиду алюминия. Кривая, соответствующая оксиду титана, почти сливается с пунктирной линией и здесь не приведена. Отметим, что с ростом концентрации наночастиц поток тепла монотонно возрастает на промежутке $\phi \in [0; 0,2]$. Относительное увеличение потока тепла при $\phi = 0,2$ по отношению к жидкости без наночастиц составляет около 27 % для меди и около 20 % для оксида алюминия.

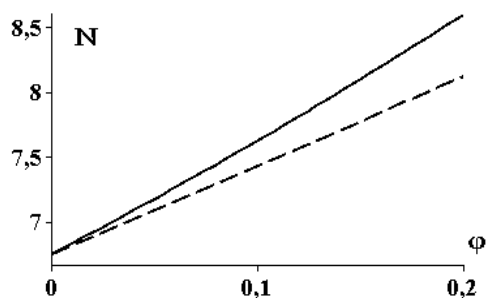


Рис. 1. Зависимость теплового потока от концентрации наночастиц

На рис. 2 изображена зависимость «приведенного» теплового потока от параметра U , пропорционального скорости внешнего невязкого течения на свободной границе. Пунктирная линия соответствует жидкости без наночастиц. Сплошная и штрихпунктирная (рядом с ней) рассчитаны соответственно для меди и оксида алюминия при концентрации наночастиц $\phi = 0,2$. С ростом скорости внешнего течения тепловой поток монотонно увеличивается при $\phi \in [0; 0,2]$.

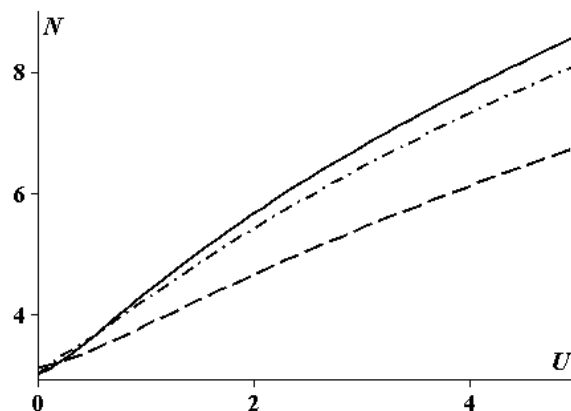


Рис. 2. Зависимость теплового потока от скорости внешнего течения

На рис. 3 показана зависимость «приведенного» теплового потока N от концентрации наночастиц для оксида титана (сплошная линия) и оксида алюминия (пунктирная линия). Рассчитан случай отсутствия внешнего потока $U = 0$. Для наночастиц оксида титана тепловой поток монотонно увеличивается с ростом концентрации наночастиц. Для оксида алюминия тепловой поток с ростом параметра ϕ сначала возрастает, затем достигает максимального значения и далее убывает.

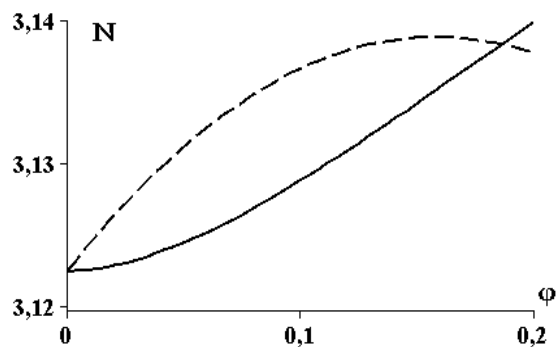


Рис. 3. Зависимость теплового потока от концентрации наночастиц оксида титана (сплошная линия) и оксида алюминия (пунктир)

На рис. 4 приведены результаты расчетов параметра N в зависимости от концентрации наночастиц меди при $U = 0$. В этом случае на промежутке $\phi \in [0; 0,2]$ с ростом концентрации ϕ тепловой поток убывает, достигает минимального значения и далее возрастает. Убывание теплового потока связано с тем, что производная температуры $\theta'(0)|_f$ на свободной границе монотонно убывает с ростом концентрации наночастиц, причем степень убывания для частиц меди больше, чем для частиц оксидов алюминия и титана.

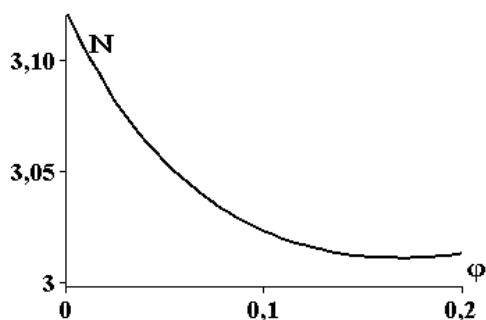


Рис. 4. Зависимость теплового потока от концентрации наночастиц меди

Заключение

В работе исследовано влияние наночастиц на перенос тепла через свободную границу в пограничном слое Марангони при наличии внешнего потока. Предполагается, что температура свободной поверхности убывает при удалении от оси симметрии. Показано, что тепловой поток возрастает с ростом скорости внешнего невязкого потока. Рассчитаны случаи, когда тепловой поток возрастает или убывает с ростом концентрации наночастиц.

Литература

1. Choi S.U.S. Enhancing thermal conductivity of fluids with nanoparticles // The Proceedings of the 1995 ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition. San Francisco, USA, 1995. P. 99 – 105.
2. Bianco V., Chiacchio F., Manca O., Nardini S. Numerical investigation of nanofluids forced convection in circular tubes // Applied Thermal Engineering. 2009. Vol. 29 (17 – 18). P. 3632 – 3642.
3. Kakac S., Pramuanjaroenkij A. Review of convective heat transfer enhancement with nanofluids // Int. J. Heat Mass Transfer. 2009. Vol. 52. P. 3187 – 3196.
4. Daungthongsuk W., Wongwises S. A critical review of convective heat transfer of nanofluids // Renew. Sustain. Energy Rev. 2007. Vol. 11. P. 797 – 817.
5. Arifin N.M., Nazar R., Pop I. Marangoni-driven boundary layer flow in nanofluids // Proceedings of the 2010 International Conference on Theoretical and Applied Mechanics. Wisconsin, USA, 2010. P. 32 – 35.
6. Brinkman H.C. The viscosity of concentrated suspensions and solutions // J. Chem. Phys. 1952. Vol. 20. P. 571 – 581.
7. Khanafer K., Vafai K., Lightstone M. Buoyancy-driven heat transfer enhancement in a two-dimensional enclosure utilizing nanofluids // Int. J. Heat Mass Transfer. 2003. Vol. 46. P. 363 – 3653.
8. Shukla R.K., Dhir V.K. Numerical study of the ef-

fective thermal conductivity of nanofluids // Proceedings of ASME Heat Transfer Conference. July, 17 – 22. San Francisco, USA, 2005. P. 1 – 9.

9. Батищев В.А. Асимптотика неравномерно нагретой свободной границы капиллярной жидкости при больших числах Марангони // Прикладная математика и механика. 1989. Т. 53, вып. 3. С. 425 – 432.

10. Batischev V.A., Zaikin V.V., Horoshunova E.V. Heat transport in Marangoni layers with nanoparticles // Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics. 2013. № 4(3). P. 31 – 319.

References

1. Choi S.U.S. Enhancing thermal conductivity of fluids with nanoparticles. *The Proceedings of the 1995 ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition*. San Francisco, USA, 1995, pp. 99-105.
2. Bianco V., Chiacchio F., Manca O., Nardini S. Numerical investigation of nanofluids forced convection in circular tubes. *Applied Thermal Engineering*, 2009, vol. 29 (17-18), pp. 3632-3642.
3. Kakaç S., Pramuanjaroenkij A. Review of convective heat transfer enhancement with nanofluids. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 2009, vol. 52, pp. 3187-3196.
4. Daungthongsuk W., Wongwises S. A critical review of convective heat transfer of nanofluids. *Renew. Sustain. Energy Rev.*, 2007, vol. 11, pp. 797-817.
5. Arifin N.M., Nazar R., Pop I. Marangoni-driven boundary layer flow in nanofluids. *Proceedings of the 2010 international conference on theoretical and applied mechanics*. Wisconsin, USA, 2010, pp. 32-35.
6. Brinkman H.C. The viscosity of concentrated suspensions and solution. *J. Chem. Phys.*, 1952, vol. 20, pp. 571-581.
7. Khanafer K., Vafai K., Lightstone M. Buoyancy-driven heat transfer enhancement in a two-dimensional enclosure utilizing nanofluids. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 2003, vol. 46, pp. 3639-3653.
8. Shukla R.K., Dhir V.K. Numerical study of the effective thermal conductivity of nanofluids. *Proceedings of ASME Heat Transfer Conference*. July, 17-22. San Francisco, USA, 2005, pp. 1-9.
9. Batishchev V.A. Asimptotika neravnomerno nagretoi svobodnoi granitsy kapillyarnoi zhidkosti pri bol'shikh chislakh Marangoni [The asymptotic behavior of the free boundary unevenly heated capillary fluid with large Marangoni numbers]. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 1989, vol. 53, no. 3, pp. 425-432.
10. Batischev V.A., Zaikin V.V., Horoshunova E.V. Heat transport in Marangoni layer with nanoparticles. *Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics*, 2013, no 4 (3), pp. 313-319.

УДК 004.056.5

АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ МИНИМАЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА n -МЕРНОЙ РЕШЕТКИ БЕРНШТЕЙНА НАД ПОЛЕМ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ $F_{2^m}(x)$

© 2015 г. В.М. Деундяк, Е. С. Чекунов

Деундяк Владимир Михайлович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник ФГНУ НИИ «Спецвузавтоматика», пер. Газетный, 51, г. Ростов н/Д, 344002; доцент, кафедра алгебры и дискретной математики, Институт математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов н/Д, 344090, e-mail: vlade@math.sfedu.ru

Deundyak Vladimir Mikhailovich – Candidate of Physical and Mathematical Science, Senior Researcher, NII «Specvuzavtomatika», Gazetny Lane, 51, Rostov-on-Don, 344002, Russia; Associate Professor, Department of Algebra and Discrete Mathematics, Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences of the Southern Federal University, Milchakov St., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: vlade@math.sfedu.ru

Чекунов Евгений Сергеевич – магистр, кафедра алгебры и дискретной математики, Институт математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов н/Д, 344090, e-mail: echekunov@gmail.com

Chekunov Evgeniy Sergeevich – Master Student, Department of Algebra and Discrete Mathematics, Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences of the Southern Federal University, Milchakov St., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: echekunov@gmail.com

Рассматривается задача нахождения минимального элемента n -мерной решетки Бернштейна над полем рациональных функций $F_{2^m}(x)$. Решение строится на основе алгоритма Ленстры приведения базиса решетки. Для n -мерной решетки Бернштейна доказывается теорема существования минимального элемента и его связь с приведенным по Ленстре базисом. Приводится алгоритм решения задачи и доказательство его корректности. Полученный результат применяется в математической модели списочного декодера Бернштейна и используется для усиления защиты кодовых криптосистем типа Мак-Элиса.

Ключевые слова: n -мерные решетки, минимальный элемент решетки, списочный декодер Бернштейна, алгоритм Ленстры.

The problem is considered of finding the minima of n -dimensional Bernstein lattice over rational functional fields $F_{2^m}(x)$. The solution is based on the Lenstra lattice basis reduction algorithm. For n -dimensional Bernstein lattice it is proved the existence of a minima element and its connection with the Lenstra reduced basis. An algorithm for solving the problem and the proof of correctness are presented. The result is applied in the mathematical model of Bernstein list decoder and it is used to enhance the protection of McEliece-like code-based cryptosystems.

Keywords: n -dimensional lattices, lattice minima, Bernstein list decoding algorithm, LLL algorithm.

В последнее время в разнообразных задачах защиты информации все чаще применяются мощные методы теории кодирования, в частности, интенсивно разрабатываются и исследуются новые кодовые криптосистемы [1]. В связи с этим актуальной является задача усиления защиты кодовых криптосистем типа Мак-Элиса [2] от несанкционированного доступа (НСД), которую можно решать за счет как подходящего выбора помехоустойчивого кода, так и применения современных методов кодирования и декодирования. Известно, что классическая криптосистема Мак-Элиса на бинарных кодах Гоппы до сих пор является стойкой к структурным атакам [3–6]. Однако для нее существуют детерминированные алгоритмы атак на шифрограмму (см., например, [3, 4]). Чтобы противостоять таким атакам, в работе [3] предложено усилить стойкость криптосистемы за счет увеличения параметров кода и замены стандартного метода декодирования Паттерсона на списочный декодер Бернштейна [7], что позволяет

вносить предусмотренные протоколом дополнительные зашумляющие помехи.

В работе [8] представлена математическая модель списочного декодера Бернштейна [7], с помощью которого можно дополнительно исправлять $(d-1)^2/8n$ ошибок в случае бинарного сепарабельного $[n, k, d]$ -кода Гоппы. В модели декодера Бернштейна задача нахождения минимального элемента заданной n -мерной решетки Бернштейна над полем рациональных функций $F_{2^m}(x)$ является ключевой. В настоящей работе она решается на основе использования алгоритма Ленстры [9].

Решетки над кольцами многочленов

Пусть $F[x]$ – кольцо многочленов от переменной x с коэффициентами из поля Галуа F . Определим функцию $\deg: F[x] \rightarrow \mathbb{Z}$, которая каждому многочлену из $F[x]$ ставит в соответствие его сте-

пень. Согласно [10], $F[x]$ -решеткой называется пара (L, μ) , состоящая из свободного $F[x]$ -модуля L и функции $\mu: L \rightarrow Z$, обладающей следующими свойствами: $\forall a, b \in L: \mu(a+b) \leq \max\{\mu(a); \mu(b)\}$,

$$\forall \alpha \in F[x], a \in L: \mu(\alpha a) = \deg \alpha + \mu(a),$$

$$\forall a \in L: \mu(a) \geq 0, \mu(0) = 0,$$

$$\forall z \in Z: |\{a \in L: \mu(a) \leq z\}| < \infty,$$

где $|X|$ – мощность произвольного множества X .

Решетку $\Lambda = (L, \mu)$ будем называть n -мерной, если ранг модуля L равен n . Линейно независимые векторы $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n \in L$ называются базисом решетки Λ .

Пусть $\Lambda = (L, \mu)$ – n -мерная $F[x]$ -решетка с базисом $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$. Числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in Z$ будем называть последовательными минимумами решетки Λ , если найдутся такие $v_1, v_2, \dots, v_n \in \Lambda$, что $\lambda_1 = \mu(v_1)$ – минимум $\mu(x)$ для всех $x \in \Lambda (x \neq 0)$; $\lambda_2 = \mu(v_2)$ – минимум $\mu(x)$ для всех $x \in \Lambda$, линейно независимых с v_1 ; ...; $\lambda_n = \mu(v_n)$ – минимум $\mu(x)$ для всех $x \in \Lambda$, линейно независимых с v_1, v_2, \dots, v_{n-1} . По определению $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$, значит \mathbf{v}_1 – минимальный вектор решетки Λ .

Свяжем с решеткой Λ матрицу $\mathbf{B}_\Lambda = (b_{ij})$, $i, j = 1 \dots n$, строками которой являются базисные элементы решетки. Под определителем решетки $\det(\Lambda)$ будем понимать определитель матрицы \mathbf{B}_Λ . Известно, что определитель решетки не зависит от выбора базиса [10].

Рассмотрим функцию \deg в кольце $F_{2^m}[x]$. Продолжим ее в поле рациональных функций $F_{2^m}(x)$ по следующему правилу:

$$\forall a \in F_{2^m}(x): \deg a = \deg \frac{\phi}{\psi} = \deg \phi - \deg \psi,$$

где $\phi, \psi \in F_{2^m}[x]$.

Определим функцию $\|\cdot\|: F_{2^m}(x) \rightarrow N \cup \{0\}$ по правилу: $\forall a \in F_{2^m}(x): \|a\| = \begin{cases} 2^{\deg a}, & \text{если } a \neq 0; \\ 0, & \text{если } a = 0. \end{cases}$

Согласно [8], функция $\|\cdot\|$ является неархимедовой нормой в поле $F_{2^m}(x)$.

Рассмотрим n -мерную $F_{2^m}(x)$ -решетку $\Lambda_n = (L_n, v_n)$ с модулем $L_n \subset (F_{2^m}(x))^n$ ранга n и нормой v_n

$\forall \phi = (\phi_1, \dots, \phi_n) \in L_n: v_n(\phi) = \max\{\|\phi_i\|, i = 1 \dots n\}$, где $\phi_i \in F_{2^m}(x)$. Решетку Λ_n будем называть n -мерной решеткой Бернштейна [7].

Пусть $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n \in \Lambda_n$ – некоторый базис решетки

Бернштейна Λ_n . Мерой неортогональности решетки Λ_n , порожденной базисом $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$, назовем величину

$$\text{mes}_{\Lambda_n} = \text{mes}_{\Lambda_n}(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n) = \frac{\prod_{i=1}^n v_n(\mathbf{b}_i)}{\|\det \mathbf{B}_{\Lambda_n}\|},$$

где $\mathbf{b}_i = (b_{i1}, \dots, b_{in})$, $\mathbf{B}_{\Lambda_n} = (b_{ij})$, $b_{ij} \in F_{2^m}(x)$, $i, j = 1 \dots n$.

Лемма 1. Для любого базиса решетки $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n \in \Lambda_n$ для меры неортогональности выполняется неравенство $\text{mes}_{\Lambda_n}(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n) \geq 1$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{b}_1 = (b_{11}, \dots, b_{1n})$, ..., $\mathbf{b}_n = (b_{n1}, \dots, b_{nn})$.

Рассмотрим матрицу $\mathbf{B}_{\Lambda_n} = (b_{ij})$, $i, j = 1 \dots n$. Не теряя общности, будем считать, что

$$\|b_{11}\| = \max\{\|b_{1j}\|, j = 1 \dots n\}, \dots,$$

$$\|b_{nn}\| = \max\{\|b_{nj}\|, j = 1 \dots n\}.$$

$$\text{Тогда } \|\det \mathbf{B}_{\Lambda_n}\| \leq \|b_{11}\| \cdot \|b_{22}\| \cdots \|b_{nn}\| = v_n(\mathbf{b}_1) \cdot v_n(\mathbf{b}_2) \cdots v_n(\mathbf{b}_n).$$

По определению меры неортогональности имеем $\text{mes}_{\Lambda_n} = \frac{\prod_{i=1}^n v_n(\mathbf{b}_i)}{\|\det \mathbf{B}_{\Lambda_n}\|} \geq 1$.

Предположим, что в результате некоторой перестановки координат базиса решетки $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ получили базис $\mathbf{b}'_1, \dots, \mathbf{b}'_n$, для которого

$$v_n(\mathbf{b}_i) \leq v_n(\mathbf{b}_j), \quad 1 \leq i < j \leq n, \quad (1)$$

$$\|b'_{ii}\| \geq \|b'_{ij}\|, \quad 1 \leq i < j \leq n, \quad (2)$$

$$\|b'_{ii}\| > \|b'_{ij}\|, \quad 1 \leq j < i \leq n. \quad (3)$$

Тогда базис решетки $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ называется приведенным по Ленстре.

Теорема 1. Пусть Λ_n – n -мерная решетка Бернштейна с базисом $\mathbf{b} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$. Тогда имеют место два утверждения.

I) следующие условия эквивалентны:

- 1) базис \mathbf{b} является приведенным по Ленстре;
- 2) базис \mathbf{b} такой, что $\text{mes}_{\Lambda_n} \mathbf{b} = 1$ и $v_n(\mathbf{b}_i) \leq v_n(\mathbf{b}_j)$, $1 \leq i < j \leq n$.

II) если выполнено одно из двух эквивалентных условий 1) и 2), то $v_n(\mathbf{b}_j)$ – j -й последовательный минимум решетки Λ_n и, в частности, $v_n(\mathbf{b}_1) \leq v_n(\mathbf{x})$ для всех $\mathbf{x} \in \Lambda_n$, $\mathbf{x} \neq 0$.

Доказательство. Предположим, что базис \mathbf{b} решетки Λ_n является приведенным по Ленстре. Тогда существует перестановка π координат базиса \mathbf{b} такая, что для векторов $\mathbf{b}'_1 = \pi(\mathbf{b}_1), \dots, \mathbf{b}'_n = \pi(\mathbf{b}_n)$

выполнены условия (1)–(3). Поскольку норма вектора не зависит от порядка его координат, то $v_n(\mathbf{b}_i') = v_n(\mathbf{b}_i)$, $1 \leq i \leq n$. Из условий (2), (3) и определения нормы v_n следует, что

$$\begin{aligned} \|b_{ii}\| &= v_n(\mathbf{b}_i), \quad i=1 \dots n, \\ \|b_{ij}\| &\leq v_n(\mathbf{b}_i), \quad 1 \leq i < j \leq n, \\ \|b_{ij}\| &< v_n(\mathbf{b}_i), \quad 1 \leq j < i \leq n. \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } \|\det \mathbf{B}_{\Lambda_n}\| \geq \prod_{i=1}^n v_n(\mathbf{b}_i).$$

Согласно лемме 1 и определению меры неортогональности, имеем $\text{mes}_{\Lambda_n} \mathbf{b} = 1$.

Покажем, что если базис \mathbf{b} приведен по Ленстре, тогда $v_n(\mathbf{b}_j)$ – j -й последовательный минимум решетки Λ_n .

Предположим, что $\lambda_j = v_n(\mathbf{x})$ – j -й последовательный минимум решетки Λ_n для некоторого $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n r_i \mathbf{b}_i$, $1 \leq j \leq n$. Для доказательства утверждения достаточно показать, что $v_n(\mathbf{x}) \geq v_n(\mathbf{b}_j)$.

Пусть \mathbf{B}_{Λ_n} – матрица, строками которой являются базисные векторы \mathbf{b}_i , $1 \leq i \leq n$. Тогда $\mathbf{B}_{\Lambda_n}^{-1} = \mathbf{A}^T / \det \mathbf{B}_{\Lambda_n}$, где \mathbf{A}^T – матрица, составленная из алгебраических дополнений элементов матрицы $\mathbf{B}_{\Lambda_n}^T$. Рассмотрим i -й столбец \mathbf{b}_i^{-1} матрицы $\mathbf{B}_{\Lambda_n}^{-1}$ как вектор.

Согласно правилу Крамера,

$$\mathbf{b}_i^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{B}_{\Lambda_n}} \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{i1} & \dots & A_{n1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & \dots & A_{in} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение матрицы \mathbf{B}_{Λ_n} .

Нас интересует норма i -го столбца матрицы $\mathbf{B}_{\Lambda_n}^{-1}$.

Оценим ее через матрицу \mathbf{B}_{Λ_n} . Из равенства

$$\mathbf{b}_i^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{B}_{\Lambda_n}} (A_{11} \dots A_{in}) \quad \text{получаем}$$

$$v_n(\mathbf{b}_i^{-1}) = \frac{1}{\det \mathbf{B}_{\Lambda_n}} v_n(A_{11}, \dots, A_{in}).$$

Поскольку алгебраическое дополнение A_{ij} представляет собой определитель матрицы \mathbf{B}_{Λ_n} с вычеркнутыми i -й строкой и j -м столбцом, то норму $v_n(A_{11}, \dots, A_{in})$ можно оценить сверху через матрицу

$$\mathbf{B}_{\Lambda_n}, \text{ а именно } v_n(A_{11}, \dots, A_{in}) \leq \frac{\prod_{j=1}^n v_n(\mathbf{b}_j)}{v_n(\mathbf{b}_i)}.$$

$$\text{Тогда } v_n(\mathbf{b}_i^{-1}) \leq \frac{\prod_{j=1}^n v_n(\mathbf{b}_j)}{v_n(\mathbf{b}_i) \|\det \mathbf{B}_{\Lambda_n}\|} = \frac{\text{mes}_{\Lambda_n} \mathbf{b}}{v_n(\mathbf{b}_i)}.$$

По определению $\mathbf{r} = \mathbf{x} \mathbf{B}_{\Lambda_n}^{-1}$, значит

$$\|r_i\| \leq v_n(\mathbf{x}) v_n(\mathbf{b}_i^{-1}) \quad \text{для всех } 1 \leq i \leq n. \quad \text{Тогда}$$

$$v_n(r_i \mathbf{b}_i) = \|r_i\| v_n(\mathbf{b}_i) \leq v_n(\mathbf{x}) v_n(\mathbf{b}_i^{-1}) v_n(\mathbf{b}_i) = \text{mes}_{\Lambda_n} \mathbf{b} \cdot v_n(\mathbf{x}).$$

Так как базис \mathbf{b} является приведенным по Ленстре, значит $v_n(\mathbf{b}_i) \leq v_n(\mathbf{b}_j)$, $1 \leq i < j \leq n$, $\text{mes}_{\Lambda_n} \mathbf{b} = 1$.

Не нарушая условие упорядоченности базиса $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$, перенумеруем его так, чтобы $r_{i_0} \neq 0$ для некоторого $i_0 \in \{j, j+1, \dots, n\}$. Номер i_0 существует, поскольку согласно предположению $v_n(\mathbf{x})$ – j -й последовательный минимум. Тогда $v_n(\mathbf{x}) \geq v_n(r_{i_0} \mathbf{b}_{i_0}) \geq v_n(\mathbf{b}_j)$.

Таким образом, $v_n(\mathbf{b}_j)$ – j -й последовательный минимум решетки Λ_n . В частности, $v_n(\mathbf{b}_1) \leq v_n(\mathbf{x})$ для всех $\mathbf{x} \in \Lambda_n$, $\mathbf{x} \neq 0$, $1 \leq j \leq n$.

Предположим, что базис \mathbf{b} такой, что $\text{mes}_{\Lambda_n} \mathbf{b} = 1$ и $v_n(\mathbf{b}_i) \leq v_n(\mathbf{b}_j)$, $1 \leq i < j \leq n$. Сделаем перестановку координат базиса \mathbf{b} так, чтобы

$$\|b'_{11}\| = \max\{\|b'_{1j}\|\}, j=1 \dots n = v_n(\mathbf{b}'_1), \dots,$$

$$\|b'_{mm}\| = \max\{\|b'_{mj}\|\}, j=1 \dots n = v_n(\mathbf{b}'_m).$$

Тогда согласно (3) имеем $\|b'_{ii}\| \geq \|b'_{ij}\|$, $1 \leq i < j \leq n$.

Так как $\|\det \mathbf{B}_{\Lambda_n}\| = \prod_{i=1}^n v_n(\mathbf{b}_i)$ и выполнено условие (2), то справедливо (3). •

Алгоритм приведения базиса n -мерной решетки Бернштейна

Пусть Λ_n – n -мерная решетка Бернштейна, порожденная базисом $\mathbf{b} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$. Опишем алгоритм приведения базиса решетки Λ_n пошагово. В качестве исходных данных возьмем базис n -мерной решетки Бернштейна \mathbf{b} . Результатом работы алгоритма будет базис, приведенный по Ленстре.

Алгоритм

Шаг 0. Определяем перестановочную матрицу $\mathbf{P} = (p_{ij})$, $1 \leq i, j \leq n$. Полагаем $\mathbf{P} = \mathbf{I}$, $k=0$.

Шаг 1. Если $k < n$, тогда переставляем базисные векторы $\mathbf{b}_{k+1}, \dots, \mathbf{b}_n$ так, чтобы выполнялось условие

$$v_n(\mathbf{b}_{k+1}) = \min\{v_n(\mathbf{b}_i) : k+1 \leq i \leq n\}.$$

Если $k = n$, тогда переходим на шаг 6.

Шаг 2. Решаем систему уравнений

$$\sum_{i=1}^k a_{ij} r_i = a_{k+1,j}, \quad 1 \leq j \leq k \quad (4)$$

относительно неизвестных r , где $a_{ij} \in F_{2^m}$ – коэф-

фициент многочлена b_{ij} при степени $x^{\log v_n(\mathbf{b}_i)}$, $1 \leq i \leq k+1$.

Шаг 3. Вычисляем

$$\mathbf{b}'_{k+1} = \mathbf{b}_{k+1} - \sum_{i=1}^k r_i \mathbf{b}_i x^{\log v_n(\mathbf{b}_{k+1}) - \log v_n(\mathbf{b}_i)}.$$

Шаг 4. Если $v_n(\mathbf{b}'_{k+1}) = v_n(\mathbf{b}_{k+1})$, то заменяем вектор \mathbf{b}_{k+1} на новый \mathbf{b}'_{k+1} . Делаем перестановку координат векторов $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ так, чтобы $\|\mathbf{b}_{k+1,k+1}\| = v_n(\mathbf{b}_{k+1})$. Вносим изменения в матрицу \mathbf{P} согласно перестановке. Присваиваем k новое значение $k+1$ и переходим на шаг 1.

Шаг 5. Если $v_n(\mathbf{b}_{k+1}) < v_n(\mathbf{b}_{k+1})$, то заменяем вектор \mathbf{b}_{k+1} на новый \mathbf{b}'_{k+1} . Находим наибольшее значение $l \in \{1, \dots, k\}$ такое, что $v_n(\mathbf{b}_l) \leq v_n(\mathbf{b}_{k+1})$. Присваиваем k новое значение l и переходим на шаг 1.

Шаг 6. Переставляем координаты векторов $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ согласно перестановке \mathbf{P} .

Шаг 7. Выводим базис $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ и выходим из алгоритма.

Теорема 2. Алгоритм приведения базиса решетки Λ_n работает корректно и за конечное число шагов преобразует заданный базис n -мерной решетки Бернштейна в базис, приведенный по Ленстре.

Доказательство. Рассмотрим n -мерную решетку Бернштейна, порожденную базисом $\mathbf{b} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$. Положим $v_n(\mathbf{b}_0) = 0$. Предположим, что для некоторого $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ на шаге 1 алгоритма выполнены условия:

$$v_n(\mathbf{b}_i) \leq v_n(\mathbf{b}_j), \quad 1 \leq i < j \leq k, \quad (5)$$

$$v_n(\mathbf{b}_k) \leq v_n(\mathbf{b}_j), \quad k < j \leq n, \quad (6)$$

$$\|\mathbf{b}_{ii}\| \geq \|\mathbf{b}_{ij}\|, \quad 1 \leq i \leq k, i < j \leq n, \quad (7)$$

$$\|\mathbf{b}_{ii}\| \geq \|\mathbf{b}_{ij}\|, \quad 1 \leq j < i \leq k.$$

Отметим, что при $k=0$ условия (5)–(7) выполняются. Если $k=n$ и \mathbf{b} удовлетворяет условиям (5)–(7), тогда по определению \mathbf{b} является приведенным по Ленстре базисом, и следовательно, алгоритм работает корректно.

Предположим, что $k < n$. Покажем, что после преобразований векторов базиса \mathbf{b} , сделанных на шагах 1–5 алгоритма, получим справедливость условий (5)–(7) при $k = k+1$.

На шаге 1 алгоритма происходит перестановка векторов базиса \mathbf{b} , в результате которой вектор \mathbf{b}_{k+1} имеет минимальную норму v_n среди векторов $\mathbf{b}_{k+1}, \dots, \mathbf{b}_n$. Кроме того, $v_n(\mathbf{b}_k) \leq v_n(\mathbf{b}_{k+1})$ в силу (6). Значит, в результате преобразований, сделанных на шаге 1 алгоритма, базис решетки удовлетворяет условиям (5), (6) при $k = k+1$. Теперь покажем справедливость условий (7).

Для того чтобы вектор \mathbf{b}_{k+1} удовлетворял условиям (7), его необходимо изменить с помощью элементарных преобразований. Для этого на шаге 2 алгоритма решается система уравнений (4), решение которой используется в преобразовании вектора \mathbf{b}_{k+1} на шаге 3. Отметим, что система уравнений (4) имеет единственное решение (r_1, \dots, r_k) , $r_i \in F_{2^m}$. Благодаря условиям (7) коэффициенты многочленов $a_{ij} \neq 0$ при $1 \leq i \leq k$ и $a_{ij} = 0$ при $1 \leq j < i \leq k$, поэтому матрица коэффициентов $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ имеет верхнетреугольный вид и ее ранг равен k .

Таким образом, после преобразований, сделанных на шаге 3, имеем $v_n(\mathbf{b}'_{k+1}) \leq v_n(\mathbf{b}_{k+1})$. Более того, благодаря решению системы (4) $\|\mathbf{b}'_{k+1,i}\| < v_n(\mathbf{b}_{k+1})$

при $1 \leq i \leq k$, поэтому в случае $v_n(\mathbf{b}'_{k+1}) = v_n(\mathbf{b}_{k+1})$ перестановка координат $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ не затронет первые k координат вектора базиса.

Если $v_n(\mathbf{b}'_{k+1}) < v_n(\mathbf{b}_{k+1})$, то согласно алгоритму необходимо присвоить k наибольшее значение $l \in \{0, 1, \dots, k\}$ такое, что $v_n(\mathbf{b}_l) < v_n(\mathbf{b}_{k+1})$. Это обеспечивает выполнение условий (5)–(7).

Таким образом, после прохождения шагов 1–6 алгоритма базис удовлетворяет условиям (5)–(7), т.е. является приведенным по Ленстре. Отметим, что в алгоритме на шаге 4 происходит перестановка координат базиса, поэтому на шаге 6 необходимо восстановить порядок координат исходного базиса. •

Литература

1. Сидельников В.М. Теория кодирования. М., 2008. 324 с.
2. McEliece R.J. A public key cryptosystem based on algebraic coding theory // DSN progress report. 1978. Vol. 42–44. P. 114–116.
3. Bernstein D.J., Lange T., Peters C. Attacking and defending the McEliece cryptosystem // Lecture Notes in Computer Science. 2008. Vol. 5299. P. 31–46.
4. Engelbert D., Overbeck R., Schmidt A. A summary of McEliece-type cryptosystems and their security // J. of Mathematical Cryptology. 2007. Vol. 1 (2). P. 151–199.
5. Minder L., Shokrollahi A. Cryptanalysis of the Sidelnikov cryptosystem // Lecture Notes in Computer Science. 2007. Vol. 4515. P. 347–360.
6. Wieschebrink C. Cryptanalysis of the Niederreiter public key scheme based on GRS subcodes // Lecture Notes in Computer Science. 2010. Vol. 6061. P. 61–72.
7. Bernstein D.J. List decoding for binary Goppa codes. 2008. URL: <http://cr.yp.to/papers.html#goppalist> (дата обращения: 21.12.2014).
8. Деундяк В.М., Чекунов Е.С. Математическая модель списочного декодера Бернштейна // Математика и ее приложения. 2012. Т. 9, вып. 1. С. 31–40.

9. Lenstra A.K. Factoring multivariate polynomials over finite fields // *J. Comput. System Sci.* 1985. Vol. 30(2). P. 235–248.

10. Lenstra H.W. Lattices. Algorithmic number theory: lattices, number fields, curves and cryptography // *Math. Sci. Res. Inst.* 2008. Vol. 44. P. 127–181.

References

1. Sidel'nikov V.M. *Teoriya kodirovaniya* [Coding theory]. Moscow, 2008, 324 p.

2. McEliece R.J. A public-key cryptosystem based on algebraic coding theory. *DNS Progress Report*, 1978, vol. 42-44, pp. 114-116.

3. Bernstein D.J., Lange T., Peters C. Attacking and defending the McEliece cryptosystem. *Lecture Notes in Computer Science*, 2008, vol. 5299, pp. 31-46.

4. Engelbert D., Overbeck R., Schmidt A. A summary of McEliece-type cryptosystems and their security. *J. of Mathematical Cryptology*, 2007, vol. 1(2), pp. 151-199.

5. Minder L., Shokrollahi A. Cryptanalysis of the Sidel'nikov cryptosystem. *Lecture Notes in Computer Science*, 2007, vol. 4515, pp. 347-360.

6. Wieschebrink C. Cryptanalysis of the Niederreiter Public Key Scheme Based on GRS Subcodes. *Lecture Notes in Computer Science*, 2010, vol. 6061, pp. 61-72.

7. Bernstein D.J. *List decoding for binary Goppa codes*. 2008. Available at: <http://cr.yp.to/papers.html#goppalist> (accessed 21.12.2014).

8. Deundyak V.M., Chekunov E.S. Matematicheskaya model' spisochnogo dekodera Bernshteina [A mathematical model of scheduling decoder Bernstein]. *Matematika i ee prilozheniya*, 2012, vol. 9, no 1, pp. 31-40.

9. Lenstra A.K. Factoring multivariate polynomials over finite fields. *J. Comput. System Sci.*, 1985, Vol. 30 (2), pp. 235-248.

10. Lenstra H.W. Lattices. Algorithmic number theory: lattices, number fields, curves and cryptography. *Math. Sci. Res. Inst.*, 2008, vol. 44, pp. 127-181.

УДК 539.3

КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ СО СЛОЖНОЙ ФОРМОЙ МЕРИДИАНА*

© 2015 г. С.С. Макаров, Ю.А. Устинов

Макаров Сергей Сергеевич – аспирант, кафедра теории упругости, Институт математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов н/Д, 344090, e-mail: makarov-sergey-rostov@mail.ru

Makarov Sergei Sergeevich – Post-Graduate Student, Department of Theory of Elasticity, Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences of the Southern Federal University, Milchakov St., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: makarov-sergey-rostov@mail.ru

Устинов Юрий Анатольевич – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра теории упругости, Институт математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов н/Д, 344090, e-mail: ustinov_rsu@mail.ru

Ustinov Yuri Anatolevich – Doctor of Physical and Mathematical Science, Professor, Department of Theory of Elasticity, Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences of the Southern Federal University, Milchakov St., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: ustinov_rsu@mail.ru

Для оболочек вращения со сложной формой меридиана и переменной толщиной разработаны методы исследования собственных крутильных колебаний. На основе полученных алгоритмов для цилиндрической оболочки исследовано влияние параметров, характеризующих переменную толщину по оси оболочки, на собственные частоты и формы колебаний. Для оболочек с выпуклым и вогнутым меридианом построены зависимости первой и второй собственных частот от амплитуды выпуклости (вогнутости).

Ключевые слова: оболочка вращения, крутильные колебания, переменная толщина.

Developed the research methods of natural torsional oscillation for revolution shells with complicated shape of meridian and variable thickness. Investigated influence of parameters describing a variable thickness along the axis of the shell, on the natural frequencies and mode shapes for cylindrical shell on the basis of the developed algorithms. Constructed dependences to the first and second natural frequencies on the amplitude of the convexity (concave) for shells with convex and concave meridian.

Keywords: shell of revolution, torsional oscillation, variable thickness.

Для оболочек вращения со сложной формой меридиана и переменной толщиной разработаны методы исследования собственных крутильных колебаний. На основе полученных алгоритмов для цилиндрической оболочки исследовано влияние параметров, характеризующих переменность толщины оболочки, на собственные частоты и формы колебаний. Для оболочек с выпуклой и вогнутой формой меридиана построены зависимости первой и второй собственных частот от геометрических параметров.

Исследованию динамического поведения оболочек с переменной толщиной посвящено значительное число работ. В их числе как вынужденные [1, 2], так и собственные колебания оболочек [3, 4]. Колебаниям оболочек вращения со сложной формой меридиана уделено не так много внимания, как оболочкам с каноническими формами срединной поверхности; [5] – одна из последних работ для таких оболочек.

Настоящая работа посвящена исследованию задач как для цилиндрических оболочек переменной толщины, так и для оболочек вращения с неканонической формой срединной поверхности.

Постановка задачи

Рассмотрим оболочку вращения, у которой $h = h(z)$, $r = r(z)$, $z \in [0, L]$, где h – толщина оболочки; r – радиус срединной поверхности; z – продольная координата; L – линейный осевой размер оболочки. Все основные полевые характеристики (смещения, деформации, усилия) будем рассматривать в гауссовой системе координат, связанной со срединной поверхностью оболочки, как функции цилиндрических координат (ϕ, z) . В этом случае коэффициенты Ляме и главные кривизны гауссовых координат срединной поверхности определяются формулами: $A_1 = r(z)$, $A_2 = \sqrt{1 + r'^2}$, $k_1 = \frac{1}{A_1 A_2}$,

$$k_2 = \frac{r''}{A_2^3}, \quad r' = \frac{dr}{dz}$$

Пусть $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ – базис Френе срединной поверхности оболочки, где \mathbf{e}_1 – орт, направленный по касательной к линии $z = \text{const}$; \mathbf{e}_2 – к линии $\phi = \text{const}$; \mathbf{e}_3 – по нормали к срединной поверхности.

Обозначим через $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ вектор смещений точек срединной поверхности, где u_i – его координаты в базисе Френе. При этом компоненты тензо-

*Работа выполнена в рамках проектной части государственного задания № 9.665.2014.К в сфере научной деятельности.

ра конечных деформаций срединной поверхности $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и тензора изменения её кривизн $\kappa_{\alpha\beta}$ в этом же базисе определяются формулами [6, 7]

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= e_{11} + \frac{1}{2}\theta_1^2, \quad \varepsilon_{22} = e_{22} + \frac{1}{2}\theta_2^2, \quad \varepsilon_{12} = e_{12} + \frac{1}{2}\theta_1\theta_2, \\ \kappa_{11} &= A_1^{-1}(\partial_\phi\theta_1 + A_2^{-1}\partial_z A_1\theta_2), \quad \kappa_{22} = A_2^{-1}(\partial_z\theta_2 + A_1^{-1}\partial_\phi A_2\theta_1), \\ \kappa_{12} &= \frac{1}{2}[A_2 A_1^{-1}\partial_\phi(\theta_2 A_2^{-1}) + A_1 A_2^{-1}\partial_z(\theta_1 A_1^{-1})], \\ e_{11} &= A_1^{-1}(\partial_\phi u_1 + A_2^{-1}\partial_z A_1 u_2) + k_1 u_3, \\ e_{22} &= A_2^{-1}(\partial_z u_2 + A_1^{-1}\partial_\phi A_2 u_1) + k_2 u_3, \\ e_{12} &= \frac{1}{2}[A_2 A_1^{-1}\partial_\phi(u_2 A_2^{-1}) + A_1 A_2^{-1}\partial_z(u_1 A_1^{-1})], \\ \theta_1 &= -A_1^{-1}\partial_\phi u_3 + k_1 u_1, \quad \theta_2 = -A_2^{-1}\partial_z u_3 + k_2 u_2, \\ \text{где } \theta_1, \theta_2 &- \text{углы поворота нормали; } \partial_\phi, \partial_z - \text{частные производные по } \phi, z \text{ соответственно.}\end{aligned}$$

В силу гипотезы Кирхгофа – Лява ($\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33} \ll \sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$) закон Гука для усилий и моментов можно записать в виде

$$\begin{aligned}T_{11} &= B(z)(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}), \quad T_{22} = B(z)(\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11}), \\ T_{12} &= B(z)(1-\nu)\varepsilon_{12}, \quad M_{11} = D(z)(\kappa_{11} + \nu\kappa_{22}), \\ M_{22} &= D(z)(\kappa_{22} + \nu\kappa_{11}), \quad M_{12} = D(z)(1-\nu)\kappa_{12},\end{aligned}$$

$$B(z) = \frac{Eh(z)}{1-\nu^2}, \quad D(z) = \frac{Eh^3(z)}{12(1-\nu^2)},$$

где E, ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона.

На основе вариационного принципа Гамильтона получаем следующие уравнения движения:

$$\begin{aligned}\partial_\phi(A_2 T_{11}) + A_1^{-1}\partial_z(A_1^2 T_{12}) - \partial_\phi A_2 T_{22} + A_1 A_2 k_1 Q_1^* &= A_1 A_2 h \rho \partial_t^2 u_1, \\ \partial_z(A_1 T_{22}) + A_2^{-1}\partial_\phi(A_2^2 T_{12}) - \partial_z A_1 T_{11} + A_1 A_2 k_2 Q_2^* &= A_1 A_2 h \rho \partial_t^2 u_2, \\ \partial_\phi(A_1 Q_1^*) + \partial_z(A_2 Q_2^*) - \\ - A_1 A_2 k_1 T_{11} + A_1 A_2 k_2 T_{22} &= A_1 A_2 h \rho \partial_t^2 u_3,\end{aligned}\quad (1)$$

где ρ – плотность; ∂_t – производная по времени; Q_1^*, Q_2^* – полные поперечные силы,

$$\begin{aligned}Q_1^* &= Q_1 - T_{11}\theta_1 - T_{12}\theta_2, \quad Q_2^* = Q_2 - T_{22}\theta_2 - T_{12}\theta_1, \\ Q_1 &= A_1^{-1}A_2^{-1}[\partial_\phi(A_2 M_{11}) - \partial_\phi A_2 M_{22} + A_1^{-1}\partial_z(A_1^2 M_{12})], \\ Q_2 &= A_1^{-1}A_2^{-1}[\partial_z(A_1 M_{22}) - \partial_z A_1 M_{11} + A_2^{-1}\partial_\phi(A_2^2 M_{12})].\end{aligned}$$

Ограничимся исследованием крутильных колебаний. Учитывая, что в этом случае $u_1 = u_1(z, t)$, $u_2 = u_3 = 0$, интегрирование системы (1) сведём к интегрированию уравнения $A_1^{-1}\partial_z(A_1^2 T_{12}) + A_1 A_2 k_1 Q_1^* = A_1 A_2 h \rho \partial_t^2 u_1$, которое после преобразований принимает вид

$$\begin{aligned}F_1(z) \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + F_2(z) \frac{\partial u_1}{\partial z} + F_3(z) u_1^3 + F_4(z) u_1 &= \\ = A_1 A_2 h \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2},\end{aligned}\quad (2)$$

$$F_1(z) = \frac{A_1}{2A_2}(\nu-1)(B(z) + k_1^2 D(z)), \quad F_3(z) = \frac{1}{2} A_1 A_2 k_1^4 B(z),$$

$$\begin{aligned}F_2(z) &= \\ = \frac{1-\nu}{2A_2^2} \left[(B(z) + k_1^2 D(z))(A_1 A_2' - A_2 A_1') - A_1 A_2 (B(z) + k_1^2 D(z))' \right], \\ F_4(z) &= \frac{\nu-1}{2A_2} \left[(B(z) + k_1^2 D(z)) \left(A_1' \left\{ \frac{A_2'}{A_2} - \frac{A_1'}{A_1} \right\} - A_1'' \right) - \right. \\ &\quad \left. - A_1' (B'(z) + k_1^2 D'(z)) + A_1 k_1 D(z) \left(k_1'' + k_1' \left\{ \frac{A_1'}{A_1} - \frac{A_2'}{A_2} + \frac{D'(z)}{D(z)} \right\} \right) \right].\end{aligned}$$

После линеаризации уравнения (2) получаем

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} = - \frac{F_2(z)}{F_1(z)} \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{F_4(z)}{F_1(z)} u_1 + \frac{A_1 A_2 h \rho}{F_1(z)} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}. \quad (3)$$

Решение уравнения (3) будем отыскивать в виде

$$u_1(z, t) = U_1(z) e^{-i\omega t}. \quad (4)$$

Функцию, характеризующую изменение толщины оболочки, представим в виде $h(x) = h_0 h_1(x)$, где $h_0 = h(0)$, $x = z/h_0$. Введём характеристики неоднородности $\alpha = \max(h)/h_0$, $\beta = \min(h)/h_0$. Вводя $Y_1 = U_1/h_0$, на основании формул (3), (4) получаем

$$Y_1'' = F(x, \Omega) Y_1 + G(x) Y_1', \quad (5)$$

где $\Omega = \sqrt{\rho/E} h_0 \omega$ – безразмерный частотный параметр, а функции $F(x, \Omega)$, $G(x)$ имеют вид

$$\begin{aligned}F(x, \Omega) &= \\ = -K\Omega^2 + \frac{A_1''}{A_1} + \frac{A_1'}{A_1} S_1 - \frac{k_1 h_1(x)}{S} [(k_1' S_2 + k_1'') h_1(x) + 3k_1' h_1'(x)], \\ G(x) &= -S_1 - \frac{2k_1 k_1'}{S}, \quad K = 24(1+\nu) \frac{A_2^2}{S}, \quad S = 12 + k_1^2 h_1^2(x), \\ S_1 &= S_2 + \frac{3h_1'(x)}{S h_1(x)} [4 + k_1^2 h_1^2(x)], \quad S_2 = \frac{A_1'}{A_1} - \frac{A_2'}{A_2}.\end{aligned}\quad (6)$$

Здесь A_1, k_1 – безразмерные величины, отнесенные к h_0 .

Будем считать, что на торцах оболочки выполняются граничные условия, отвечающие жесткой заделке:

$$Y_1(x)|_{x=0, L_0} = 0, \quad (7)$$

где $L_0 = L/h_0$.

Для интегрирования поставленных краевых задач и определения собственных частот крутильных колебаний оболочки вращения уравнение (5) сведём к эквивалентной системе дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned}\frac{dY_1(x)}{dx} &= Y_2(x), \\ \frac{dY_2(x)}{dx} &= F(x, \Omega) Y_1(x) + G(x) Y_2(x),\end{aligned}\quad (8)$$

краевая задача для которой может быть проанализирована методом пристрелки.

Цилиндрическая оболочка

В случае цилиндрической оболочки
 $r = R = \text{const}$, $A_1 = R$, $A_2 = 1$, $k_1 = R^{-1}$, $k_2 = 0$,

$$F(x, \Omega) = -\frac{24(1+\nu)R_0^2}{12R_0^2 + h_1^2(x)} \Omega^2,$$

$$G(x) = -\frac{3h_1'(x)}{h_1(x)} \frac{4R_0^2 + h_1^2(x)}{12R_0^2 + h_1^2(x)}, \quad \text{где } R_0 = R/h_0.$$

Замечание. Цилиндрической оболочке постоянной толщины отвечает $h_1(x) = 1$, что позволяет строить точные аналитические решения краевой задачи (5)–(7), которые могут служить своеобразными тестами для различных полевых характеристик оболочек переменной толщины, которые определялись на основе численного интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений (8) с граничными условиями (7). Приведем здесь аналитическую формулу для расчета безразмерных собственных частот цилиндрической оболочки постоянной толщины

$$\omega_n = \frac{1}{h_0} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \Omega_n, \quad \Omega_n = \frac{\pi n}{L_0 R_0} \sqrt{\frac{12R_0^2 + 1}{24(1+\nu)}}.$$

Численные исследования для оболочек переменной толщины проводились при фиксированных значениях: $h_0 = 0,002$ м, $R = 0,1$ м, $\nu = 0,3$ для следующих законов изменения $h_1(x)$:

$$h_1(x) = \text{ch} \frac{\alpha_1 x}{L_0}; \quad h_1(x) = 1 + \frac{\alpha_2 x}{L_0};$$

$$h_1(x) = 1 + \alpha_2 \sin \frac{\pi x}{2L_0}; \quad h_1(x) = 2 - \text{ch} \frac{\alpha_1 x}{L_0}; \quad (9)$$

$$h_1(x) = 1 - \frac{\alpha_2 x}{L_0}; \quad h_1(x) = 1 - \alpha_2 \sin \frac{\pi x}{2L_0};$$

$$h_1(x) = 1 \pm \alpha_3 \sin \frac{\pi n x}{L_0}, \quad n = 1, 2, 9, 10,$$

$$h_1(x) = 1 \pm \alpha_3 \sin^2 \frac{\pi n x}{L_0}, \quad n = 1, 2, 7,$$

$$h_1(x) = 1 \pm \alpha_4 \sin \frac{\pi n x}{L_0} e^{\pm \frac{x}{L_0}}, \quad n = 5, 6, 11, 12.$$

Численное интегрирование системы (8) осуществлялось методом пристрелки [8].

Приведем некоторые результаты проведенных исследований.

1. При исследовании зависимости первой Ω_1 и второй Ω_2 собственных частот крутильных колебаний от длины оболочки L_0 установлено, что неоднородность толщины наиболее сильно проявляется для длинных оболочек ($L_0 \in [300, 500]$).

2. В случае $\alpha \in [1, 1, 2]$, $\beta \in [0, 8; 0, 9]$ в выражениях (9): $\alpha_1 = 0,5$, $\alpha_2 = 0,125$, $\alpha_3 = 0,2$, $\alpha_4 = 0,5$, неоднородность существенно влияла на значение Ω_1 , Ω_2

только для $h_1(x) = 1 \pm 0,2 \sin \frac{\pi x}{L_0}$ и $h_1(x) = 1 \pm 0,2 \sin^2 \frac{\pi x}{L_0}$

(рис. 1а). В остальных случаях частоты неоднородной цилиндрической оболочки отличались от частот однородной не более чем на 6 %. Заметим, что все законы монотонного возрастания (убывания) показывали довольно близкие результаты: соответствующие частоты отличались не более чем на 4 %.

3. При $\alpha \in [1, 4; 1, 5]$, $\beta \in [0, 5; 0, 6]$, в частности, когда в выражениях (9) $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0,5$, $\alpha_3 = 0,4$, $\alpha_4 = 0,2$, полученные результаты позволяют сделать вывод, что влияние неоднородности на значения частоты крутильных колебаний увеличилось. На рис. 1б представлены некоторые результаты для указанного случая.

Оболочка вращения с переменным радиусом срединной поверхности

Будем считать, что толщина оболочки постоянна, а радиус срединной поверхности $r = r(x)$. В этом случае система (8) принимает вид

$$\frac{dY_1(x)}{dx} = Y_2(x), \quad \frac{dY_2(x)}{dx} = F(x, \Omega)Y_1(x) + G(x)Y_2(x),$$

где функции $F(x, \Omega)$, $G(x)$ получаются из (6) при $h_1(x) = 1$.

Для численных расчетов выбраны оболочки со следующими законами изменения радиуса срединной поверхности:

$$r(x) = R_0 + H_0 \sin \frac{\pi x}{L_0}, \quad (10)$$

$$r(x) = R_0 - H_0 \sin \frac{\pi x}{L_0}, \quad (11)$$

а сами расчеты проведены при следующих значениях параметров: $h_0 = 0,002$ м, $L = 0,1$ м, $R = 0,1$ м, $\nu = 0,3$, причем для выбранных параметров законы изменения радиусов можно условно разделить на выпуклые для $H_0 > 0$ и вогнутые для $H_0 < 0$.

Проведенный анализ позволяет сделать следующие выводы (рис. 2):

1. Для выпуклой оболочки при увеличении амплитуды формы поверхности H_0 величина первой собственной частоты Ω_1 уменьшается; при этом параметр Ω_1 для вида (11) меньше, чем для вида (10).

2. Для вогнутой оболочки график функции $\Omega_1(H_0)$ для обоих законов изменения меридиана (10), (11) имеет немонотонный характер.

3. Вторая собственная частота Ω_2 как выпуклой, так и вогнутой оболочек вращения для обоих законов (10), (11) уменьшается при увеличении амплитудного параметра H_0 . Стоит отметить, что для оболочки (11) при $H_0 \approx 6,3$ происходит резкое уменьшение значения Ω_2 в 2 раза.

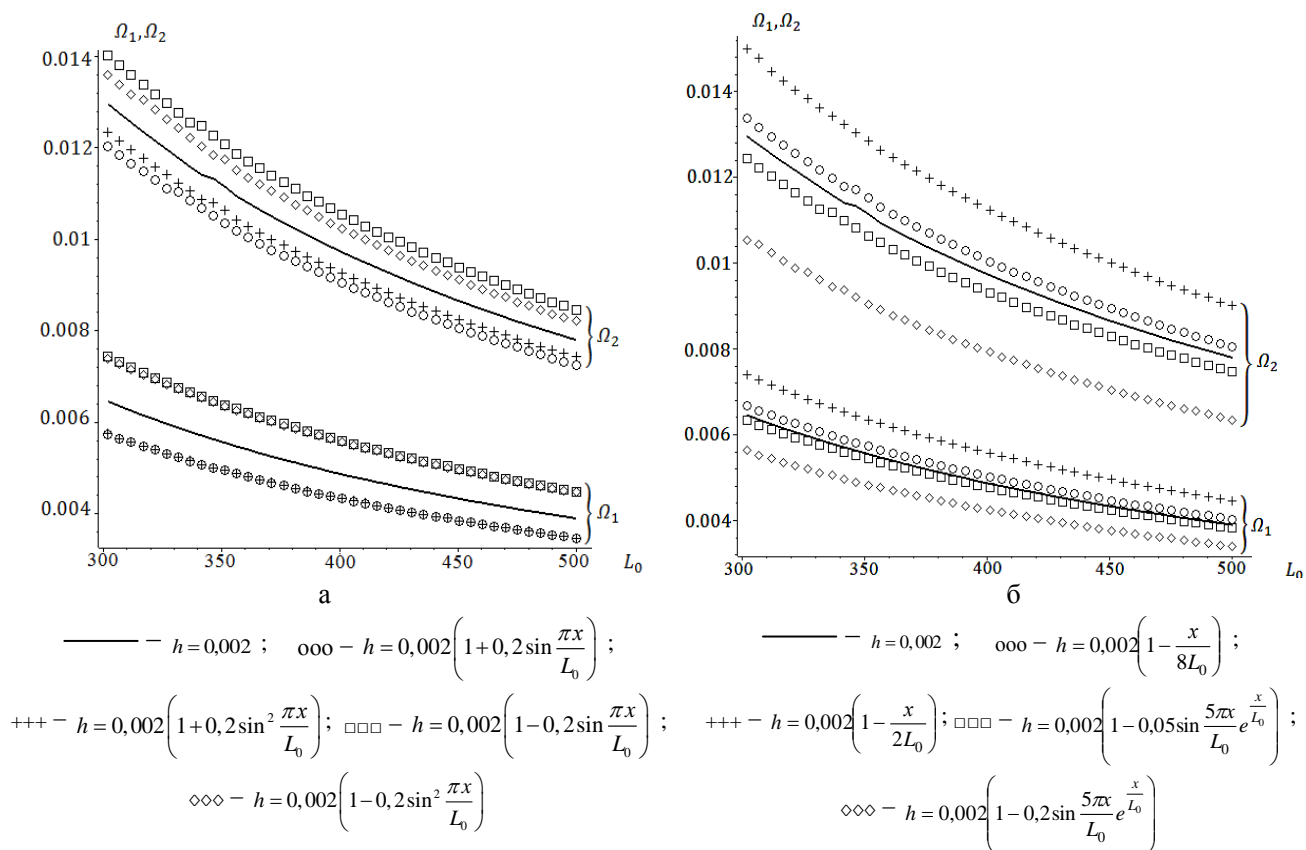


Рис. 1. Зависимости безразмерных частотных параметров Ω_1 , Ω_2 от безразмерной длины L_0 для цилиндрической оболочки с постоянной и переменной толщиной: а – при слабой неоднородности ($\alpha \in [1, 1.2]$, $\beta \in [0.8, 0.9]$); б – при увеличении параметра неоднородности ($\alpha \in [1.4, 1.5]$, $\beta \in [0.5, 0.6]$)

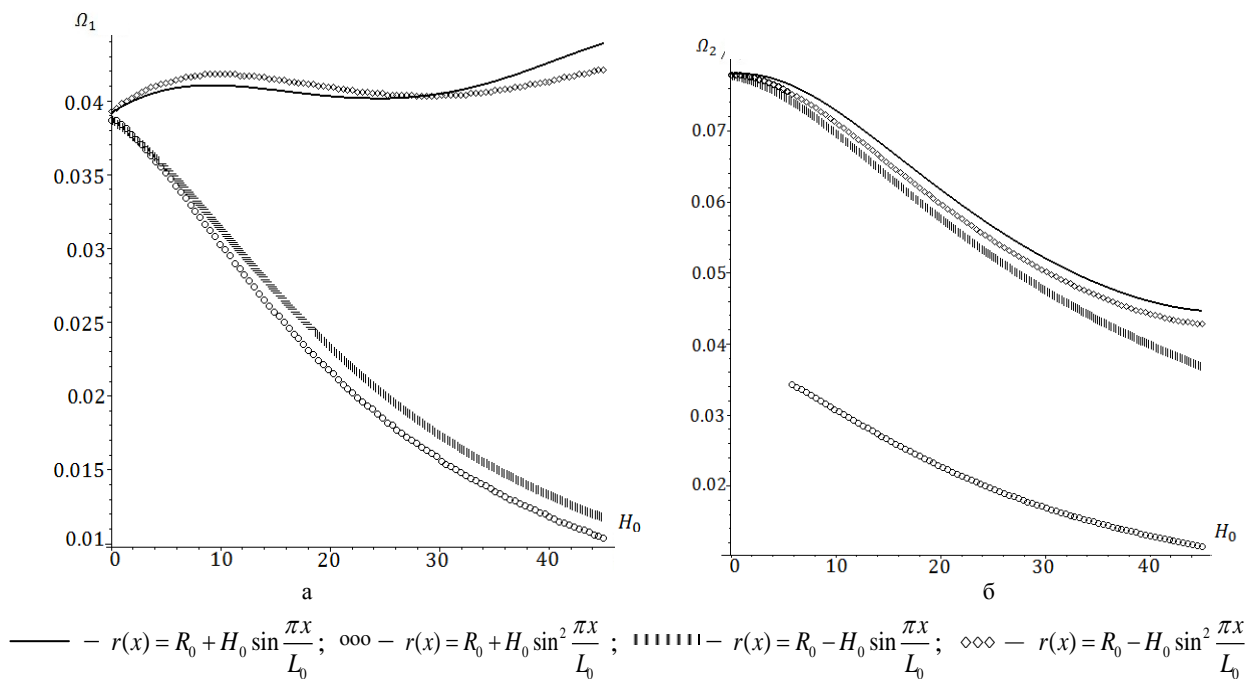


Рис. 2. Зависимости безразмерных частотных параметров выпуклой и вогнутой оболочек вращения от безразмерной амплитуды формы H_0 : а – Ω_1 ; б – Ω_2

Выводы

На основе проведенных исследований установлено, что для цилиндрических оболочек с монотонно изменяющейся толщиной значения первых двух собственных частот крутильных колебаний Ω_1 , Ω_2 слабо отличаются от аналогичных значений для цилиндрической оболочки с $h = \text{const}$, а при некоторых немонотонных законах изменения толщины это влияние значительно сильнее.

Анализ первой частоты для оболочек вращения с постоянной толщиной и переменным радиусом выявил, что для вогнутой оболочки функция $\Omega_1(H_0)$ имеет немонотонный характер, для выпуклой – убывающий.

Заметим, что значения первой Ω_1 и второй Ω_2 собственных частот оболочек вращения с выпуклым меридианом выше, чем соответствующие значения Ω_1 , Ω_2 для оболочек с вогнутой формой срединной поверхности, как в случае переменной толщины и постоянного радиуса, так и в случае постоянной толщины и переменного радиуса.

Литература

1. Mohammad Zamani Nejad, Mehdi Jabbari, Mehdi Ghannad. Elastic analysis of axially functionally graded rotating thick cylinder with variable thickness under non-uniform arbitrarily pressure loading // *Int. J. of Engineering Science*. 2015. Vol. 89. P. 86 – 99.
2. Мейш В.Ф., Шипицына Т.В. Осесимметричные колебания цилиндрических оболочек переменной толщины при действии нестационарной нагрузки // *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. 2013. Вип. 21. С. 167 – 177.
3. Duan W.H., Koh C.G. Axisymmetric transverse vibrations of circular cylindrical shells with variable thickness // *J. of Sound and Vibration*. 2008. Vol. 317, №. 3–5. P. 1035 – 1041.
4. Suzuki K., Kosawada T., Shikanai G. Vibrations of rotating circular cylindrical shells with varying thickness // *J. of Sound and Vibration*. 1993. Vol. 166, iss. 2. P. 267–282.
5. Пузырев С.В. О свободных колебаниях гофрированных цилиндрических оболочек переменной толщины // *Наукові праці. Комп'ютерні технології*, 2012. Вип. 179, т. 191. С. 46 – 48.

6. Ворович И.И. Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек. М., 1989. 373 с.

7. Гетман И.П., Карякин М.И., Устинов Ю.А. Анализ нелинейного поведения круглых мембран с произвольным профилем по радиусу // *Прикладная математика и механика*. 2010. Т. 74, вып. 6. С. 917 – 927.

8. Калиткин Н.Н. Численные методы. М., 1978. 512 с.

References

1. Mohammad Zamani Nejad, Mehdi Jabbari, Mehdi Ghannad. Elastic analysis of axially functionally graded rotating thick cylinder with variable thickness under non-uniform arbitrarily pressure loading. *Int. J. of Engineering Science*, 2015, vol. 89, pp. 86-99.
2. Meish V.F., Shipitsyna T.V. Osесimmetrichnye kolebaniya tsilindricheskikh obolochek peremennoi tolshchiny pri deistvii nestatsionarnoi nagruzki [Axisymmetric vibrations of cylindrical shells of varying thickness under the influence of unsteady loads]. *Problemi obchislyval'noi mekhaniki i mitsnosti konstruktivnii*, 2013, vol. 21, pp. 167-177.
3. Duan W.H., Koh C.G. Axisymmetric transverse vibrations of circular cylindrical shells with variable thickness. *J. of Sound and Vibration*, 2008, vol. 317, no 3-5, pp. 1035-1041.
4. Suzuki K., Kosawada T., Shikanai G. Vibrations of rotating circular cylindrical shells with varying thickness. *J. of Sound and Vibration*, 1993, vol. 166, iss. 2, pp 267-282.
5. Puzyrev S.V. O svobodnykh kolebaniyakh gofrovannykh tsilindricheskikh obolochek peremennoi tolshchiny [About free vibration of corrugated cylindrical shells of variable thickness]. *Naukovi pratsi. Komp'yuterni tekhnologii*, 2012, no 179, vol. 191, pp. 46-48.
6. Vorovich I.I. *Matematicheskie problemy nelineinoi teorii plogikh obolochek* [Mathematical problems of the nonlinear theory of shallow shells]. Moscow, 1989, 373 p.
7. Getman I.P., Karyakin M.I., Ustinov Yu.A. Analiz nelineinogo povedeniya kruglykh membran s proizvol'nym profilem po radius [Analysis of the nonlinear behavior of a circular membrane with arbitrary profile along the radius]. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 2010, vol. 74, no 6, pp. 917-927.
8. Kalitkin N.N. *Chislennyye metody* [Numerical methods]. Moscow, 1978, 512 p.

УДК 519.83+519.86

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЕРТИКАЛЬНОЙ МАРКЕТИНГОВОЙ СИСТЕМЫ С УЧЕТОМ ВОЗМОЖНОЙ КОРРУПЦИИ*

© 2015 г. А.Э. Назиров, А.Б. Усов

Назиров Адалят Эльшанович – аспирант, кафедра прикладной математики и программирования, Институт математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов н/Д, 344090, e-mail: carma@mail.ru

Nazirov Adalyat Elshanovich – Post-Graduate Student, Department of the Applied Mathematics and Programming, Institute of the Mathematics, Mechanics and Computer Sciences of the Southern Federal University, Milchakov St., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: carma@mail.ru

Усов Анатолий Борисович – доктор технических наук, доцент, кафедра прикладной математики и программирования, Институт математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов н/Д, 344090, e-mail: usov@math.sfedu.ru

Usov Anatolii Borisovich – Doctor of Technical Science, Associate Professor, Department of the Applied Mathematics and Programming, Institute of the Mathematics, Mechanics and Computer Sciences of the Southern Federal University, Milchakov St., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: usov@math.sfedu.ru

Представлена математическая модель, описывающая деятельность различных субъектов вертикальной маркетинговой системы. В роли субъектов управления выступают поставщик, производящий продукцию, посредник, с которым у поставщика заключен договор комиссии, и торговое предприятие, реализующее продукцию поставщика в розничной сети. Модель построена на основе теоретико-игрового и иерархического подходов. Строится равновесие по Штакельбергу с учетом требований поддержания системы в заданном состоянии и возможной коррумпированности субъектов управления. В качестве метода иерархического управления используется метод побуждения. Приведен ряд характерных примеров с последующей интерпретацией полученных результатов. Сделаны выводы о путях борьбы с коррупцией в трехуровневых системах управления.

Ключевые слова: иерархия, трехуровневая система управления, метод побуждения, равновесие по Штакельбергу, коррупция, имитация.

An original mathematical model, that describes different activities of actors in the vertical marketing system is presented. There are a provider, a mediator, a trading enterprise are presented as a controlling subjects. The relationship between provider and mediator accords to commission agreement. Trading enterprise sells products is produced by the provider. The model is based on the game-theoretical and hierarchical approach. A Stackelberg equilibrium in terms of sustainable development is established under possible corruption. The method of impulsion is used as a method of hierarchical control to solve this model. A number of typical examples followed by an interpretation of the results obtained are presented. Some contributions to fight corruption in three-level system are made.

Keywords: hierarchy, three-level control system, method of impulsion, Stackelberg's equilibrium, corruption, computing simulation.

Успешное функционирование любых экономических объектов невозможно без комплексного подхода к проблеме управления и предполагает наличие отлаженной системы управления. Изучение различного рода систем управления проходит в рамках теории активных систем [1, 2], теории иерархических игр [3], а также теории контрактов [4].

При анализе эколого-экономических систем особую роль играет теория иерархических систем управления, в концепции которой учитывается специфика механизмов управления реальными эколого-экономическими объектами.

Моделирование эколого-экономических систем начиналось с использования одноуровневых моделей. Системы такого рода содержат только один субъект управления. В таких моделях не учитыва-

ется всё многообразие связей экономической и экологической подсистем. Однако современные системы управления являются многоуровневыми, отношения внутри которых построены на принципах иерархии (начальник – подчиненный).

Простейшей иерархически организованной системой управления является двухуровневая, включающая в себя субъекты управления двух иерархически соподчиненных уровней управления (ведущий, ведомый), а также управляемую систему (УС) [3]. Такие системы управления часто используются при организации реальных экономических объектов и позволяют организовать работу всей системы оптимальным образом. Но существует множество экономических объектов, эффективное функционирование которых невозможно при использовании

* Работа выполнена при поддержке ЮФУ, проект № 213.01-07.2014/07ПЧВГ.

системы управления двухуровневой структуры. В этих случаях необходимо строить систему управления, учитывая потребности в дополнительных субъектах управления, относящихся к разным иерархически соподчиненным уровням. Поэтому наряду с двухуровневыми системами управления экономическими объектами в настоящее время распространены трехуровневые системы, в состав которых входят субъекты управления верхнего, среднего и нижнего уровней. Такие системы управления более точно отражают структуру взаимоотношений между хозяйствующими субъектами.

Специфика любой трехуровневой системы управления состоит в том, что интересы субъектов управления среднего и верхнего уровней различны, а порой и противоположны. Как следствие, субъекты управления среднего уровня могут быть заинтересованы в получении взяток от субъектов управления нижнего уровня, в обмен на которые они ослабляют свое воздействие на них. Таким образом, в трехуровневых системах управления возможны побочные платежи, которые являются скрытыми действиями в целях достижения собственной выгоды и видом оппортунистического поведения [5–7]. Подобного рода «комиссионные» получили широкое распространение под термином «откат» (kickbacks) [5, 6]. Откаты являются одним из видов взяток, и в современном мире имеют место как с участием государственных органов или чиновников, так и между субъектами бизнеса при наличии посредника между ними. Между субъектами управления могут возникнуть коррупционные отношения.

Основополагающей работой по математическому моделированию коррупции считается статья С. Роз-Аккерман [7]. В ней представлен ряд моделей, описывающих коррупционное поведение экономических субъектов. В дальнейшем отдельные вопросы коррупции исследовались в [1, 6, 8 – 11]. В этих и других работах изучаются статические и динамические (многошаговые) модели коррупции; случаи попустительства и вымогательства; политическая, экономическая, организационная коррупция; дилемма взяточника; возможность подкупа контролирующего органа, случай его независимости, неподкупности и другие. Классификация и анализ работ, посвященных математическому моделированию коррупции, приведены в [8].

В данной работе строится и исследуется трехуровневая модель, описывающая взаимодействие нескольких субъектов вертикальной маркетинговой системы: поставщика (ПС), посредника (ПР) и торгового предприятия (ТП). Взаимоотношения ПР и ПС происходят в соответствии с договорами комиссии или агентским.

Наличие иерархии в отношениях между субъектами управления обусловлено порядком принятия ими решений. Этот факт определяет инструментальный исследования построенной модели [3]. Взаимоотношения ПС и ПР происходят в соответствии с договором комиссии или агентским договором. Предполагается, что основной целью ПС является поддержание системы в заданном состоянии [3]. В качестве метода иерархического управления в предложенной модели используется метод побуждения [2, 3, 9].

Математическая постановка задачи

Основная цель экономических субъектов – увеличение собственной прибыли. Важную роль в достижении этой цели играет способ движения товара от производителя к конечному потребителю. Система, включающая в себя ряд организаций, которые принимают на себя или помогают передать другому право собственности на конкретный товар на пути от производителя к потребителю, называется каналом распределения продукции [12]. Выделяют традиционные каналы распределения, вертикальные и горизонтальные маркетинговые системы.

В данной работе рассматривается трехуровневая модель вертикальной маркетинговой системы, включающая ПС; ПР; ТП; УС (потребители).

Взаимоотношения между субъектами управления данной системы носят следующий характер: ПС воздействует на ПР, ПР – на ТП.

Подобная организация взаимоотношений обусловила иерархию между субъектами управления системы, в соответствии с которой ПС выступает в качестве субъекта управления верхнего уровня, ПР – среднего, ТП – нижнего. ТП действует от собственного имени, используя товары и товарные знаки ПС; ПР – от имени ПС, который в свою очередь контролирует деятельность ПР.

Деятельность ПС связана с производством строительных материалов из древесины. Его основной целью является поддержание системы в заданном состоянии (гомеостазе). Компании-производители для осуществления своей деятельности нуждаются в разрешении на выброс загрязняющих веществ (ЗВ), в котором оговаривается класс опасности ЗВ и их объемы. Данное разрешение может быть отозвано в связи с превышением объемов ЗВ или их класса опасности, а функционирование компании – приостановлено. Предполагается, что основной целью ПС является выполнение экологических нормативов и поддержание системы в гомеостазе, и во вторую очередь – максимизация собственной прибыли. Будем считать, что система находится в гомеостазе, если количество ЗВ, поступающих в атмосферу при производстве строи-

тельных материалов, соответствует нормам, установленным государством. Данное условие может быть выполнено не единственным образом, поэтому, кроме того, ПС стремится к максимизации прибыли, полученной в результате реализации произведенной им продукции. ПС реализует продукцию через ПР, с которым у него заключен договор комиссии. В соответствии с данным договором ПС выступает в роли комитента, а ПР – комиссионера.

ПС предоставляет ПР товар по базовой цене, которой ПС может управлять. ПР может менять (увеличивать или уменьшать) цену, установленную ПС, в пределах, оговоренных договором комиссии. ПР управляет величиной собственной накрутки или скидки к цене ПС. Согласно договору комиссии, ПР за оказанные им услуги получает комиссионное вознаграждение, величина которого зависит от объема проданной им продукции.

ТП занимается продажей строительных материалов, приобретаемых у ПС через ПР. ТП стремится к максимизации своей прибыли, управляя размером своей наценки на стоимость продукции, по которой оно приобретает товар у ПР. С доходов всех субъектов управления государство взимает налог.

В качестве метода иерархического управления используется метод побуждения [3, 9].

Интересы ПР и ПС не совпадают. Каждый из них заинтересован в максимизации своего дохода. Поэтому ПР может быть заинтересован в получении взяток от ТП, в обмен на которые он уменьшает свою наценку на продукцию ПС. Размер взятки определяется ТП. ПР в свою очередь может принять ее или отклонить. В случае принятия взятки ПР уменьшает свою наценку на стоимость продукции. Предполагается, что ПС не обращает внимание на наличие коррупции в системе, т.е. не контролирует и не наказывает ПР и ТП за взятки.

Пусть ПС производит и продает товары одного типа. Кроме того, имеется одно ТП, которому ПС через ПР продает свой товар.

ТП стремится к максимизации своей прибыли. При этом оно несет фиксированные и переменные затраты. Фиксированные затраты, в отличие от переменных, не зависят от объема продаваемой продукции.

Целевая функция ТП имеет вид

$$J_{TP} = (1 - \nu)((c_{TP} - s \cdot P_{TP} - S_{RS}) \cdot V(P_{TP}) - FC_{TP} - \delta \cdot Cr \cdot V(P_{TP})) \rightarrow \max_{c_{TP}, Cr}, \quad (1)$$

$$P_{TP} = P_{TP}^0 + c_{TP}, \quad V(P_{TP}) = \frac{A}{(P_{TP})^\alpha}.$$

В (1) ν – величина налога на прибыль; P_{TP}^0 , P_{TP} – цена единицы продукции у ПР и ТП соответственно; c_{TP} – наценка ТП; $V(P_{TP})$ – объем продаваемой

ТП продукции; он зависит от цены P_{TP} с постоянным коэффициентом эластичности α ; $c_{TP} \cdot V(P_{TP})$ – доход ТП от реализации продукции; $FC_{TP} = const$ – фиксированные затраты ТП; $s = const$ – доля выручки ТП, выделяемая в фонд заработной платы ($s \in (0, 1)$); $S_{RS} = const$ – средства, которые ТП тратит на хранение единицы продукции ($S_{RS} > 0$); Cr – размер взятки, приходящейся на единицу продукции; δ – постоянная, равная единице, если взятка ПР принимается, и нулю – в противном случае. Предполагается, что товар, который продает ТП, является эластичным, т.е. $|\alpha| > 1$; $A, \alpha = const$.

ПР получает от ТП заказ на товар в количестве $V(P_{TP})$ и направляет его на исполнение ПС. Последний поставляет готовую продукцию ПР, тот в свою очередь – ТП. ПР тратит собственные средства на повышение своей квалификации, аренду офиса и использование средств связи. С учетом возможной коррупции в системе целевая функция ПР имеет вид

$$J_{PR} = (1 - \nu)(1 - \cos t_{PR}) \cdot b \cdot P_{PC} \cdot V(P_{TP}) + \delta \cdot Cr \cdot V(P_{TP}) \rightarrow \max_{c_{PR}, \delta}, \quad (2)$$

$$P_{PR}^0 = P_{PC} \cdot (1 + c_{PR} - \frac{c_{PR} - c_{PRmin}}{Cr_{max}} \cdot Cr \cdot \delta). \quad (3)$$

Здесь $\frac{c_{PR} - c_{PRmin}}{Cr_{max}} \cdot Cr$ – полезность взятки, ко-

торая показывает, насколько взятка уменьшает цену, устанавливаемую ПР; Cr_{max} – максимально возможный размер взятки; c_{PR} – наценка ПР; c_{PRmin} – размер минимальной наценки ПР, указанный в договоре комиссии; b – величина комиссионных за единицу проданной продукции; P_{PC} – цена единицы продукции у ПС; $b \cdot P_{PC} \cdot V(P_{TP})$ – комиссионные, получаемые от ПС, за единицу проданного товара; они зависят от стоимости продукции у ТП; $cost_{PR}$ – доля средств от общей выручки ПР, которую составляют переменные затраты.

Предполагается, что основной целью ПС является поддержание системы в гомеостазе. Будем считать, что система находится в гомеостазе, если выполнено неравенство

$$M_{II}(V) < M_{II\max}, \quad (4)$$

где $M_{II\max}$ – максимально допустимый объем сброса ЗВ в окружающую среду, установленный государством; $M_{II}(V(P_{TP}))$ – количество попадающих в окружающую среду загрязнений, зависящее от объема произведенной продукции ($V(P_{TP})$).

Выполнения условия (4) ПС может добиться не единственным образом. Он стремится к увеличению собственного дохода, управляет базовой стоимостью продукции P_{PC} , расходует средства на оплату услуг связи, рекламу и аренду склада. Эти затраты не зависят от объема продаж. Кроме того, ПС тратит средства на выплату комиссионных ПР,

аренду склада, зарплату сотрудникам, а также закупку сырья. Эти затраты зависят от объема проданной продукции.

Целевая функция ПС имеет вид

$$J_{ПС} = (1 - \nu)((P_{ПР}^0 - (\text{cost}_{ПС} + b) \cdot P_{ПС} - z_s) \times \\ \times V(P_{ПТ}) - FC_{ПС}) \rightarrow \max_{S_{ПС}}, \quad (5)$$

где $FC_{ПС} = \text{const}$ – фиксированные затраты ПС; $\text{cost}_{ПС}$ – размер переменных затрат; z_s – стоимость хранения одной единицы продукции у ПС.

Описанная выше модель решается при следующих ограничениях на управление:

$$P_{ПС\min} \leq P_{ПС} \leq P_{ПС\max}, \quad (6)$$

$$c_{ПР\min} \leq c_{ПР} \leq c_{ПР\max}, \quad \delta = \{0,1\}, \quad (7)$$

$$c_{ПТ\min} \leq c_{ПТ} \leq c_{ПТ\max}, \quad 0 \leq Cr \leq Cr_{\max}, \quad (8)$$

где $P_{ПС\min}$, $P_{ПС\max}$ – размеры минимальной и максимальной цены единицы продукции у ПС; $c_{ПР\min}$, $c_{ПР\max}$ ($c_{ПТ\min}$, $c_{ПТ\max}$) – размеры минимальной и максимальной наценки ПР (ПТ) на единицу продукции.

Исследуемая модель описывается системой уравнений и неравенств (1) – (8).

Методы исследования модели

Бескоррупционный случай ($Cr_{\max} = Cr = \delta = 0$).

Алгоритм нахождения равновесия

побуждения в бескоррупционном случае

1. Решается задача (1), (8). Определяется оптимальная для ТП наценка, которая зависит от стоимости единицы продукции у ПР, т.е. от $P_{ПС}$ и $c_{ПР}$. Обозначим ее через $c_{ПТ}^*(P_{ПС}, c_{ПР})$.

2. Решается задача (2), (3), (7) при $c_{ПТ} = c_{ПТ}^*(P_{ПС}, c_{ПР})$. Определяется оптимальное управление ПР в зависимости от величины $P_{ПС}$. Обозначим его $c_{ПР}^*(P_{ПС})$.

3. Подставим найденные на первом и втором шагах алгоритма величины $c_{ПТ}^*(P_{ПС}, c_{ПР}^*(P_{ПС}))$ и $c_{ПР}^*(P_{ПС})$ в (4) – (6). Определяется оптимальная для ПС стоимость единицы продукции $P_{ПС}^*$.

4. Решение модели (1) – (8) имеет вид $\{P_{ПС}^*, c_{ПР}^*(P_{ПС}^*), c_{ПТ}^*(P_{ПС}^*, c_{ПР}^*(P_{ПС}^*))\}$.

Задачи, решаемые на шагах 1 – 3 алгоритма, представляют собой нелинейные задачи условной оптимизации, решаемые с учетом иерархии в отношениях между субъектами управления.

Пусть наложены следующие ограничения на входные параметры субъектов управления:

– ТП

$$0 \leq s < 1; 0 < S_{RS}; 0 < A; \alpha > 1;$$

– ПР

$$0 < b < 1; 0 < \text{cost}_{ПР} < 1; -1 < c_{ПР\min};$$

– ПС

$$(1 + c_{ПР\min}) > \text{cost}_{ПС} + b.$$

Тогда равновесие по Штакельбергу с учетом требований поддержания системы в заданном состоянии строится аналитически методом множителей Лагранжа. Оптимальное управление ТП выглядит следующим образом:

$$c_{ПТ}^* = \begin{cases} c_{ПТ\min}, & \text{если } c_{ПР} < c_{01} \\ c_{ПТ}^0, & \text{если } c_{ПР} \in [c_{01}, c_{02}), \\ c_{ПТ\max}, & \text{если } c_{ПР} \geq c_{02} \end{cases}$$

$$\text{где } c_{01} = \frac{c_{ПТ\min}(\alpha - 1)(1 - s) - \alpha S_{RS}}{(1 - s + \alpha s) \cdot P_{ПС}} - 1;$$

$$c_{02} = \frac{c_{ПТ\max}(\alpha - 1)(1 - s) - \alpha S_{RS}}{(1 - s + \alpha s) \cdot P_{ПС}} - 1;$$

$$c_{ПТ}^0 = \frac{(1 - s + \alpha s) \cdot P_{ПС}(1 + c_{ПР}) + \alpha S_{RS}}{(\alpha - 1)(1 - s)}.$$

В бескоррупционном случае управление ПС, вне зависимости от значений входных параметров, имеет вид $c_{ПС}^* = c_{ПС\min}$.

Задача ПС исследуется аналитически методом множителей Лагранжа. На данном этапе определяется базовая стоимость единицы продукции с учетом значений параметров управления ПР и ТП, а также требования поддержания системы в заданном состоянии. Ниже приведено несколько примеров.

Введем обозначения:

$$P_{01} = \frac{c_{ПТ\min}(\alpha - 1)(1 - s) - \alpha \cdot S_{RS}}{(1 - s + \alpha s) \cdot (c_{ПС\min} + 1)};$$

$$P_{02} = \frac{c_{ПТ\max}(\alpha - 1)(1 - s) - \alpha \cdot S_{RS}}{(1 - s + \alpha s) \cdot (c_{ПС\min} + 1)};$$

$$P_0^0 = \frac{z_s \alpha (1 + c_{ПС\min}) + ((1 + c_{ПС\min}) - (\text{cost}_{ПР} + b)) c_{ПТ\min}}{(1 + c_{ПС\min})(\alpha - 1)((1 + c_{ПС\min}) - (\text{cost}_{ПР} + b))};$$

$$P_1^0 = \frac{\frac{\alpha S_{RS}}{(\alpha - 1)(1 - s)} ((1 + c_{ПС\min}) - (\text{cost}_{ПР} + b)) + \alpha z_s L}{(\alpha - 1) \cdot L((1 + c_{ПС\min}) - (\text{cost}_{ПР} + b))};$$

$$P_2^0 = \frac{c_{ПТ\max}((1 + c_{ПС\min}) - (\text{cost}_{ПР} + b)) + \alpha z_s (1 + c_{ПС\min})}{(\alpha - 1)(1 + c_{ПС\min})((1 + c_{ПС\min}) - (\text{cost}_{ПР} + b))};$$

$$L = (1 + c_{ПС\min}) + \frac{(1 - s + \alpha s)(1 + c_{ПС\min})}{(\alpha - 1)(1 - s)}.$$

Если выполняется ограничение на область допустимых управлений ПР

$$P_{ПС\max} \leq \frac{c_{ПТ\min}(\alpha - 1)(1 - s) - \alpha S_{RS}}{(1 - s + \alpha s) \cdot (c_{ПР\min} + 1)},$$

то управление ПР принимает вид

$$P_{ПС}^* = \begin{cases} P_{ПС\max}, & P_0^0 \geq P_{ПС\max} \text{ и } P_{ПС\max} < P_{01}, \\ P_0^0, & P_{ПС\min} \leq P_0^0 < P_{ПС\max} \text{ и } P_{ПС\max} < P_{01}, \\ P_{ПС\min}, & P_{ПС\min} > P_0^0 \text{ и } P_{ПС\max} < P_{01}. \end{cases}$$

$$\text{Если } \begin{cases} \frac{c_{ТП\min}(\alpha-1)(1-s)-\alpha S_{RS}}{(1-s+\alpha s) \cdot (c_{ПП\min}+1)} \leq P_{ПС\min}, \\ P_{ПС\max} < \frac{c_{ТП\max}(\alpha-1)(1-s)-\alpha S_{RS}}{(1-s+\alpha s) \cdot (c_{ПП\min}+1)}, \end{cases}$$

то $P_{ПС}^* =$

$$= \begin{cases} P_{ПС\max}, P_1^0 \geq P_{ПС\max} \text{ и } P_{ПС\max} < P_{02} \text{ и } P_{ПС\min} > P_{01}, \\ P_1^0, P_{ПС\min} \leq P_1^0 < P_{ПС\max} \text{ и } P_{ПС\max} < P_{02} \text{ и } P_{ПС\min} > P_{01}, \\ P_{ПС\min}, P_{ПС\min} > P_1^0 \text{ и } P_{ПС\max} < P_{02} \text{ и } P_{ПС\min} > P_{01}. \end{cases}$$

При ограничениях вида

$$P_{ПС\min} \geq \frac{c_{ТП\max}(\alpha-1)(1-s)-\alpha S_{RS}}{(1-s+\alpha s) \cdot (c_{ПП\min}+1)}$$

оптимальное управление ПР принимает вид

$$P_{ПС}^* = \begin{cases} P_{ПС\max}, P_2^0 \geq P_{ПС\max} \text{ и } P_{ПС\min} \geq P_{02}, \\ P_2^0, P_{ПС\min} \leq P_2^0 < P_{ПС\max} \text{ и } P_{ПС\min} \geq P_{02}, \\ P_{ПС\min}, P_{ПС\min} > P_2^0 \text{ и } P_{ПС\min} \geq P_{02}. \end{cases}$$

Таким образом, оптимальная стратегия ПС $P_{ПС}^*$ принимает одно из девяти значений в зависимости от значений входных параметров: $P_{ПС\min}, P_{ПС\max}, P_0^0, P_1^0, P_2^0, P_{01}, (P_{01}-\varepsilon), P_{02}, (P_{02}-\varepsilon)$.

Равновесие Штакельберга принимает вид $\{P_{ПР}^*, c_{ПС}^*, c_{ТП}^*\}$.

При наличии коррупции в системе ($Cr_{\max} \neq 0$) алгоритм нахождения равновесия побуждения заключается в следующем.

1. Решается задача (1), (8). Определяется оптимальная для ТП наценка и размер предлагаемой ПР взятки. Эти величины зависят от стоимости продукции у ПР (т.е. от $P_{ПС}$ и $c_{ПР}$) и решения ПР о принятии взятки от ТП. Обозначим эти значения через $\{c_{ТП}^*(P_{ПС}, c_{ПР}, \delta), Cr^*(P_{ПС}, c_{ПР}, \delta)\}$.

2. Найденные в первом пункте алгоритма величины $\{c_{ТП}^*(P_{ПС}, c_{ПР}, \delta), Cr^*(P_{ПС}, c_{ПР}, \delta)\}$ подставляются в (2), (3). Решается задача (2), (3), (7). Определяется оптимальное управление ПР в зависимости от $P_{ПС}$. Обозначим его через $\{c_{ПР}^*(P_{ПС}), \delta^*(P_{ПС})\}$.

3. Подставим найденные на первом и втором шагах алгоритма величины $\{c_{ПР}^*(P_{ПС}), \delta^*(P_{ПС})\}$ и $\{c_{ТП}^*(P_{ПС}, c_{ПР}^*(P_{ПС}), \delta^*(P_{ПС})), Cr^*(P_{ПС}, c_{ПР}^*(P_{ПС}), \delta^*(P_{ПС}))\}$ в (4) – (6). Определяется оптимальное для ПС значение стоимости единицы продукции $P_{ПС}^*$.

4. Решение модели (1) – (8) имеет вид $\{P_{ПС}^*, c_{ПР}^*(P_{ПС}^*), \delta^*(P_{ПС}^*), c_{ТП}^*(P_{ПС}^*, c_{ПР}^*(P_{ПС}^*), \delta^*(P_{ПС}^*)), Cr^*(P_{ПС}^*, c_{ПР}^*(P_{ПС}^*), \delta^*(P_{ПС}^*))\}$.

В общем случае равновесие с учетом возможной коррупции строится численно методом прямого упорядоченного перебора областей допустимых управлений на основе имитационного моделирования.

Равновесие Штакельберга принимает следующий вид: $\{P_{ПР}^*, P_{ПС}^*, c_{ТП}^*\}$.

Результаты расчетов

Приведем несколько примеров исследования модели (1) – (8).

Пример 1. При отсутствии коррупции в системе для следующего набора входных параметров:

$A=10000$; $\alpha=1,35$; $c_{ТП\min}=2$ у.е.; $c_{ТП\max}=50$ у.е.; $Cr_{\max}=0$ у.е.; $\delta=0$; $FC_{ТП}=50$ у.е.; $s=0,1$; $S_{RS}=0,3$ у.е.; $c_{ПР\min}=-0,2$; $c_{ПР\max}=1,5$; $cost_{ПР}=0,3$; $b=0,3$; $P_{ПС\min}=10$ у.е.; $P_{ПС\max}=200$ у.е.; $M_{ПМ\max}=10$ т; $cost_{ПС}=0,2$; $FC_{ПС}=100$ у.е.; $z_s=0,5$ у.е.; $v=0,15$.

Оптимальные стратегии субъектов управления имеют вид $c_{ТП}^*=c_{ТП\max}=50$ у.е.; $c_{ПР}^*=c_{ПР\min}=-0,2$; $P_{ПС}^*=P_2^0=185$ у.е.

Доход субъектов управления в равновесии системы равен $J_{ПС}=285,9$ у.е.; $J_{ПР}=262,0$ у.е.; $J_{ТП}=159,1$ у.е.

Здесь $J_{ПС}$, $J_{ПР}$, $J_{ТП}$ – доходы ПС, ПР и ТП соответственно; у.е. – стоимость в условных единицах; т – тонна.

В данном случае ТП и ПР выгодно назначать максимально возможные наценки к ценам ПР и ПС соответственно.

Пример 2. В случае входных данных примера 1 и $\alpha=1,55$ получим, что $c_{ТП}^*=c_{ТП\max}=18$ у.е.;

$c_{ПР}^*=c_{ПР\min}=-0,2$; $P_{ПС}^*=P_{ПС\min}=10$ у.е.;

$J_{ПС}=51,3$ у.е.; $J_{ПР}=114,4$ у.е.; $J_{ТП}=780,1$ у.е.

Следовательно, с ростом коэффициента эластичности прибыль ТП растет, а ПР и ПС – падает.

Пример 3. В случае входных данных примера 1 и $P_{ПС\max}=50$ у.е. имеем $c_{ТП}^*=c_{ТП\max}=50$ у.е.;

$c_{ПР}^*=c_{ПР\min}=-0,2$; $P_{ПС}^*=P_{ПС\max}=50$ у.е.;

$J_{ПС}=198,5$ у.е.; $J_{ПР}=205,3$ у.е.; $J_{ТП}=753,3$ у.е.

С уменьшением максимально возможной стоимости единицы товара у ПС для него оптимальным становится именно это значение цены единицы продукции. Прибыль ТП в этом случае возрастает по сравнению с примером 1, прибыли ПР и ПС падают.

Пример 4. В случае входных данных примера 1 и $A=5000$: $c_{ТП}^*=c_{ТП\max}=50$ у.е.; $c_{ПР}^*=c_{ПР\min}=-0,2$; $P_{ПС}^*=P_2^0=185$ у.е.; $J_{ПС}=100,5$ у.е.; $J_{ПР}=131,0$ у.е.; $J_{ТП}=58,3$ у.е.

Снижение объема производства у ПС влечет за собой снижение прибыли всех субъектов управления системы.

Пример 5. В случае входных данных примера 1 и $c_{ТП\max}=5$ у.е. получим $c_{ТП}^*=c_{ТП\max}=5$ у.е.;

$c_{ПР}^*=c_{ПР\min}=-0,2$; $P_{ПС}^*=P_2^0=50$ у.е.;

$J_{ПС}=686,5$ у.е.; $J_{ПР}=579,9$ у.е.; $J_{ТП}=214,1$ у.е.

Снижение величины максимально допустимой наценки ТП влечет увеличение прибыли ПС и ПР и снижение прибыли ТП.

Пример 6. В случае входных данных примера 1 и $Cr_{\max}=20$ у.е. в системе появляется коррупция, причем $c_{ТП}^*=50$ у.е.; $Cr^*=5,5$ у.е.; $c_{ПР}^*=1,5$; $\delta^*=1$;

$P_{ПС}^*=26$ у.е.; $J_{ПС}=557,5$ у.е.; $J_{ПР}=194,8$ у.е.; $J_{ПТ}=495,5$ у.е.

Максимальную выгоду от взяток получает ТП, прибыль ПР также возрастает, а ПС – падает.

Пример 7. В случае входных данных примера 6 и $Cr_{\max}=50$ у.е.: $c_{ПТ}^*=50$ у.е.; $Cr^*=0$ у.е.; $c_{ПР}^*=-0,2$; $\delta^*=0$; $P_{ПС}^*=185$ у.е.; $J_{ПС}=285,9$ у.е.; $J_{ПР}=262,0$ у.е.; $J_{ПТ}=159,1$ у.е.

С повышением величины максимально допустимой взятки эффективность взятки падает (формула (3)). ПР стремится получить с ТП чересчур большую взятку. ТП становится невыгодно ее предлагать.

Пример 8. В случае входных данных примера 6 и $Cr_{\max}=20$ у.е. и $c_{ПР\max}=0,3$: $c_{ПТ}^*=50$ у.е.; $r^*=0$ у.е.; $c_{ПР}^*=-0,2$; $\delta^*=0$; $P_{ПС}^*=185$ у.е.; $J_{ПС}=285,9$ у.е.; $J_{ПР}=262,0$ у.е.; $J_{ПТ}=159,1$ у.е.

Если возможности ПР невелики – он не может сильно завышать цену ПС, то коррупции в системе нет. ТП невыгодно предлагать ПР взятку.

Заключение

В работе на основе теоретико-игрового и иерархического подходов предложена математическая модель системы управления вертикальной маркетинговой системой с учетом возможной коррумпированности субъектов управления; введено понятие равновесия Штакельберга в игре трех лиц с учетом требований поддержания системы в заданном состоянии, указан алгоритм его построения.

Выявлены основные закономерности функционирования системы и способы борьбы с коррупцией в ней, которые состоят в следующем:

1. Увеличение объема продаж влечет за собой увеличение прибыли всех субъектов управления. С ростом коэффициента эластичности (α) происходит снижение прибыли ПС и ПР.

2. При отсутствии коррупции в системе уменьшение максимально допустимой скидки, предоставляемой ПР, приводит к увеличению прибыли ПС. ПР выгодно предоставить ТП максимально возможную скидку. При увеличении размера комиссионных прибыль ПР увеличивается, ТП и ПС – снижается.

3. В бескоррупционном случае для ПС выгоднее платить комиссионные ПР исходя не из собственной цены, а из цены ПР; ТП выгодно, чтобы комиссионные рассчитывались исходя из цены ПС. При низкой эластичности товара суммарная прибыль всех субъектов управления выше при расчете комиссионных исходя из цены ПР.

4. При низкой эластичности товара коррупция повышает суммарную прибыль всех субъектов. При высокой эластичности товара коррупция не

меняет суммарную прибыль субъектов. Следовательно, повышение эластичности товара является одним из средств борьбы с коррупцией в системе.

5. При указанной в модели функции эффективности взятки для ТП дача взятки выгодна только при «небольших» значениях максимально допустимой взятки. В противном случае запросы ПР превышают возможности ТП. Взятка не дается. Уменьшение возможностей ПР, а именно уменьшение максимально допустимой его наценки к цене ПС, делает для ТП невыгодным дачу взятки и способствует искоренению коррупции в системе.

Отметим, что в бескоррупционном случае исследованный в работе механизм взаимодействия субъектов управления в той или иной мере находит отражение во взаимодействии ряда мебельных фабрик, их региональных представителей, дилеров, индивидуальных частных предпринимателей и фирм.

Литература

1. Выборнов Р.А. Модели и методы управления организационными системами с коррупционным поведением участников. М., 2006. 110 с.
2. Новиков Д.А. Теория управления организационными системами. М., 2012. 604 с.
3. Угольников Г.А. Иерархическое управление устойчивым развитием. М., 2010. 336 с.
4. Тамбовцев В.Л. Введение в экономическую теорию контрактов : учеб. пособие. М., 2004. 144 с.
5. Баев И.А., Климов Б.О. Моделирование оппортунистического поведения менеджеров промышленного предприятия // Вестн. Южно-Уральского гос. ун-та. Экономика и менеджмент. 2009. № 29 (162). С. 63 – 65.
6. Lambert-Mogiliansky A., Majumdar M., Radner R. Petty corruption: A game – theoretical approach // J. of Economic Theory. 2008. Vol. 4. P. 273 – 297.
7. Rose-Ackerman S. The economics of corruption // J. of Political Economy. 1975. Vol. 4. P. 187 – 203.
8. Левин М.И., Цирик М.Л. Коррупция как объект математического моделирования // Экономика и математические методы. 1998. Т. 34, № 3. С. 40 – 62.
9. Угольников Г.А., Усов А.Б. Статические модели коррупции в системах контроля качества водных ресурсов // Проблемы управления. 2012. № 4. С. 38 – 44.
10. Горбанева О.И., Угольников Г.А., Усов А.Б. Моделирование коррупции в иерархических системах управления. Ростов н/Д., 2014. 412 с.
11. Вас М. Corruption and supervision costs in hierarchies // J. of Comparative Economics. 1996. № 2. P. 99 – 118.
12. Голубков Е.П. Основы маркетинга. М., 1999. 656 с.

References

1. Vybornov R.A. *Modeli i metody upravleniya organizatsionnymi sistemami s korrupsionnym povedeniem uchastnikov* [Models and methods of control of organizational systems with the corrupt behavior of participants]. Moscow, 2006, 110 p.
2. Novikov D.A. *Teoriya upravleniya organizatsionnymi sistemami* [Theory of control of organizational systems]. Moscow, 2005, 604 p.
3. Ugol'nitskii G.A. *Ierarkhicheskoe upravlenie us-toichivym razvitiem* [Hierarchical management of sustainable development]. Moscow, 2010, 336 p.
4. Tambovtsev V.L. *Vvedenie v ekonomicheskuyu teoriyu kontraktov* [Introduction to the economic theory of contracts]. Moscow, 2004, 144 p.
5. Baev I.A., Klimov B.O. Modelirovanie opportunisticheskogo povedeniya menedzherov promyshlennogo predpriyatiya [Simulation of opportunistic behavior of managers of industrial enterprises]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Ekonomika i menedzhment*, 2009, no 29 (162), pp. 63-65.
6. Lambert-Mogiliansky A., Majumdar M., Radner R. Petty corruption: A game - theoretic approach. *J. of Economic Theory*, 2008, vol. 4, pp. 273-297.
7. Rose-Ackerman S. The economics of corruption. *J. of Political Economy*, 1975, Vol. 4, pp. 187-203.
8. Levin M.I., Tsirik M.L. Korrupsiya kak ob"ekt matematicheskogo modelirovaniya [Corruption as an object of mathematical modeling]. *Ekonomika i matematicheskie metody*, 1998, vol. 34, no. 3, pp. 40-62.
9. Ugol'nitskii G.A., Usov A.B. Staticheskie modeli korrupsii v sistemakh kontrolya kachestva vodnykh resursov [Static models of corruption in the system of quality control of water resources]. *Problemy upravleniya*, 2012, no 4, pp. 38-44.
10. Gorbaneva O.I., Ugol'nitskii G.A., Usov A.B. *Modelirovanie korrupsii v ierarkhicheskikh sistemakh upravleniya* [Corruption modeling in hierarchical control systems]. Rostov-on-Don, 2014, 412 p.
11. Bac M. Corruption and supervision costs in hierarchies. *J. of Comparative Economics*, 1996, no 2, pp. 99-118.
12. Golubkov E.P. *Osnovy marketinga* [Fundamentals of marketing]. Moscow, 1999, 656 p.

УДК 539.3

КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СОСТАВНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА*

© 2015 г. Д.А. Пожарский, В.И. Полтинников

Пожарский Дмитрий Александрович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики, Донской государственный технический университет, пл. Гагарина, 1, г. Ростов н/Д, 344000, e-mail: pozharda@rambler.ru

Pozharskii Dmitrii Aleksandrovich – Doctor of Physical and Mathematical Science, Professor, Head of Applied Mathematics Department, Don State Technical University, Gagarin Sq., 1, Rostov-on-Don, 344000, Russia, e-mail: pozharda@rambler.ru

Полтинников Виктор Иванович – доцент, кафедра прикладной математики, Донской государственный технический университет, пл. Гагарина, 1, г. Ростов н/Д, 344000.

Poltinnikov Viktor Ivanovich – Associate Professor, Applied Mathematics Department, Don State Technical University, Gagarin Sq., 1, Rostov-on-Don, 344000, Russia.

Получены интегральные уравнения (ИУ) трехмерных контактных задач для упругого полупространства, составленного из двух клиновидных слоев, соединенных скользящей заделкой. Клиновидный слой, примыкающий к слою, в который вдавливаются штамп, несжимаем (резино-металлическое сочленение). Внешняя грань этого слоя свободна от напряжений либо подчинена условиям скользящей заделки. Для решения вспомогательных краевых задач о действии заданной нормальной нагрузки применен метод комплексных интегральных преобразований Фурье и Конторовича – Лебедева, позволивший свести их к системам ИУ Фредгольма второго рода, решения которых затем вошли в ядра ИУ контактных задач. Для решения контактных задач использован метод Галанова.

Ключевые слова: контактная задача, составное полупространство, клин.

The integral equations are derived for three-dimensional contact problems for an elastic half-space consisting of two wedge-shaped layers with sliding support in between. The wedge-shaped layer joined to the layer in contact with a punch is incompressible (rubber-metal conjunction). The outer face of this layer is supposed to be stress-free or subjected to sliding support. To solve auxiliary boundary-value problems for a given normal load the method of Fourier and Kontorovich – Lebedev complex integral transformations is used. These auxiliary problems are finally reduced to systems of Fredholm integral equations of the second kind, solutions of which go into the kernels of the integral equation of the contact problems. For solving the contact problems the Galanov's method is used.

Keywords: contact problem, composite half-space, wedge.

Ранее изучались аналогичные плоские задачи [1], рассматривался случай, когда клиновидный слой под штампом несжимаем [2].

Рассмотрим, используя цилиндрические координаты, упругое полупространство, составленное из клиновидных слоев $\Omega_1 = \{r \in [0, \infty); \varphi \in [\alpha - \pi, -\alpha]; z \in (-\infty, \infty)\}$ и $\Omega_2 = \{r \in [0, \infty); \varphi \in [-\alpha, \alpha]; z \in (-\infty, \infty)\}$, которые имеют углы раствора $\pi - 2\alpha$ и 2α соответственно и соединены скользящей заделкой по грани $\varphi = -\alpha$. Материал клина Ω_1 несжимаем (коэффициент Пуассона $\nu_1 = 0,5$, модуль сдвига G_1). Материал клина Ω_2 имеет коэффициент Пуассона ν и модуль сдвига G . В грань $\varphi = \alpha$ под действием силы P без перекоса вдавливаются жесткий штамп. Осадка штампа равна δ , а форма основания описывается функцией $f(r, z)$. Внешняя грань клина Ω_1 $\varphi = \alpha - \pi$ свободна от напряжений (задача А) или находится в условиях скользящей заделки (задача Б). При известных величинах $\alpha, \nu, G, G_1, \delta$ и заданной функции $f(r, z)$ требуется определить контактное давление $\sigma_\varphi(r, \alpha, z) = -q(r, z)$, а также область контакта Ω . Затем можно определить связь между величинами P и δ .

Для вывода интегральных уравнений (ИУ) контактных задач А и Б используются метод комплексных интегральных преобразований Фурье и Конторовича–Лебедева и техника сведения краевой задачи теории упругости для трехмерного клина к системе функциональных уравнений со сдвигом аргумента [3]. Функционально-сдвиговые уравнения удается свести к системе двух ИУ Фредгольма второго рода относительно вспомогательных функций $\Phi_n(\tau)$ ($n = 1, 2; \lambda > 0, 0 \leq \tau < \infty$)

$$\Phi_n(\tau) \pm \varepsilon(1 - \nu)Q(\tau)[W_1(\tau)\Phi_1(\tau) + \quad (1)$$

$$+ W_2(\tau)\Phi_2(\tau)] - (1 - 2\nu) \int_0^\infty L_n(\tau, u)\Phi_n(u)du =$$

$$= \mp \varepsilon(1 - \nu)Q(\tau)[W_1(\tau) + W_2(\tau)] \operatorname{ch} \frac{\pi\tau}{2} K_{it}(\lambda x) +$$

$$+ (1 - 2\nu) \int_0^\infty L_n(\tau, u) \operatorname{ch} \frac{\pi u}{2} K_{iu}(\lambda x) du,$$

$$L_n(\tau, u) = 2 \operatorname{ch} \frac{\pi\tau}{2} \operatorname{sh} \frac{\pi u}{2} W_n(u) \times$$

$$\times \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} \pi t g_n(t) dt}{(\operatorname{ch} \pi t + \operatorname{ch} \pi \tau)(\operatorname{ch} \pi t + \operatorname{ch} \pi u)}, \quad \varepsilon = \frac{G_1}{G},$$

* Работа выполнена по госзаданию Минобрнауки РФ (проект 2941).

$$W_n(\tau) = \pm \frac{\operatorname{ch} 2\alpha\tau \mp \cos 2\alpha}{\operatorname{sh} 2\alpha\tau \pm \tau \sin 2\alpha},$$

$$g_n(\tau) = \frac{\sin^2 2\alpha}{\operatorname{ch} 2\alpha\tau \mp \cos 4\alpha} \begin{cases} \operatorname{cth}\alpha\tau \\ \operatorname{th}\alpha\tau \end{cases},$$

$$Q(\tau) = \frac{2(\operatorname{sh}^2(\pi - 2\alpha)\tau - \tau^2 \sin^2 2\alpha)}{\operatorname{sh} 2(\pi - 2\alpha)\tau - \tau \sin 4\alpha} \quad (\text{задача А}),$$

$$Q(\tau) = \frac{\operatorname{sh} 2(\pi - 2\alpha)\tau - \tau \sin 4\alpha}{\operatorname{ch} 2(\pi - 2\alpha)\tau - \cos 4\alpha} \quad (\text{задача Б}).$$

Здесь и ниже при $n = 1$ берется верхний знак (функция), а при $n = 2$ – нижний. Правые части уравнений (1) экспоненциально убывают при $\tau \rightarrow \infty$. Для численного решения системы (1) применим метод механических квадратур.

Контактные задачи затем сводятся к ИУ относительно $q(r, z)$:

$$\iint_{\Omega} q(x, y) K(r, z, x, y) dx dy = \frac{2\pi G}{1-\nu} [\delta - f(r, z)], \quad (2)$$

$$(r, z) \in \Omega,$$

$$K(r, z, x, y) = \quad (3)$$

$$= \frac{1}{R} + \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \operatorname{sh} \pi\tau \left\{ \left[\frac{W_1(\tau) - W_2(\tau)}{2} - \operatorname{cth}\pi\tau \right] K_{it}(\lambda x) + \right. \\ \left. + \frac{W_1(\tau)\Phi_1(\tau) - W_2(\tau)\Phi_2(\tau)}{2\operatorname{ch}(\pi\tau/2)} K_{it}(\lambda r) \cos \lambda(z - y) d\lambda d\tau. \right.$$

Здесь функции $\Phi_n(\tau)$ ($n=1, 2$) удовлетворяют системе (1). Главный член R^{-1} в ядре (3) соответствует случаю однородного упругого полупространства [3]. При $\varepsilon=0$ ядро (3) совпадает с известным [3] для однородного клина с одной свободной от напряжений гранью, символом ядра которого служит функция

$$\frac{W_1(\tau) - W_2(\tau)}{2} = \frac{\operatorname{sh} 4\alpha\tau + \tau \sin 4\alpha}{\operatorname{ch} 4\alpha\tau - \tau^2(1 - \cos 4\alpha) - 1}.$$

В частном случае, когда $\nu=0,5$, система (1) имеет точное решение

$$\Phi_n(\tau) = \frac{\mp \varepsilon Q(\tau)[W_1(\tau) + W_2(\tau)]}{2 + \varepsilon Q(\tau)[W_1(\tau) - W_2(\tau)]} \operatorname{ch} \frac{\pi\tau}{2} K_{it}(\lambda x).$$

При $\nu=0,5$, $\varepsilon=1$, $2\alpha=\pi/2$ (две одинаковые несжимаемые четверти пространства, соединенные скользящей заделкой) символ ядра ИУ (2)

$$\frac{W_1(\tau) - W_2(\tau)}{2} - \frac{Q(\tau)[W_1(\tau) + W_2(\tau)]^2}{4 + 2Q(\tau)[W_1(\tau) - W_2(\tau)]} = \quad (4)$$

$$= \frac{\operatorname{sh}^2 \pi\tau - 2\tau^2 \operatorname{ch}^2(\pi\tau/2)}{2\operatorname{sh}\pi\tau(\operatorname{sh}^2(\pi\tau/2) - \tau^2)} \quad (\text{задача А})$$

или $= \frac{\operatorname{sh}\pi\tau}{2\operatorname{sh}^2(\pi\tau/2) - \tau^2} \quad (\text{задача Б}).$

Функции в правой части формулы (4) совпадают с известными символами ядер интегральных уравнений плоской и пространственной контактных задач, рассмотренных ранее. Задача А в случае (4) соответствует задачам А [1] и В [2]. Задача Б в случае (4) соответствует задачам Б [1] и А [2]. При этом в соответствующих формулах [1] следует взять $\varepsilon=1$, $\alpha=\beta=\pi/2$, а в [2, (1.5)–(1.9)] следует положить $\nu=0,5$, $\varepsilon=1$, $\alpha=\beta=\pi/2$, $\mu=0$.

Для численного решения ИУ (2) применим метод Галанова нелинейных граничных ИУ, позволяющий одновременно определить область контакта и контактные давления [3]. Предположим, что область контакта содержится в прямоугольнике S , который покроем равномерной сеткой. При расчете значений ядра (3) в узлах сетки его особенности сглаживались путем регуляризации [3]. Как показывают расчеты, в случае задачи А значения контактного давления и вдавливающей силы несколько меньше, чем в задаче Б (при тех же значениях задаваемых параметров).

Литература

1. Пожарский Д.А. Смешанные задачи теории упругости для составного плоского клина // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2008. № 5. С. 36–38.
2. Александров В.М., Пожарский Д.А. Пространственные контактные задачи с трением для составного упругого клина // Прикладная математика и механика. 2010. Т. 74, вып. 6. С. 969–977.
3. Александров В.М., Пожарский Д.А. Неклассические пространственные задачи механики контактных взаимодействий упругих тел. М., 1998. 288 с.

References

1. Pozharskii D.A. Smeshannye zadachi teorii uprugosti dlya sostavnogo ploskogo klina [Mixed elasticity problem for a composite plane wedge]. *Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskii region. Estestvennye nauki*, 2008, no 5, pp. 36–38.
2. Aleksandrov V.M., Pozharskii D.A. Prostranstvennye kontaktnye zadachi s treniem dlya sostavnogo uprugogo klina [The spatial contact problem with friction for the composite elastic wedge]. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 2010, vol. 74, no 6, pp. 969–977.
3. Aleksandrov V.M., Pozharskii D.A. *Neklassicheskie prostranstvennye zadachi mekhaniki kontaknykh vzaimodeistvii uprugikh tel* [Non-classical spatial problems of mechanics of contact interactions of elastic bodies]. Moscow, 1998, 288 p.

УДК 517.518

О ВЗАИМОСВЯЗИ МОДУЛЕЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ СО ЗНАКОЧУВСТВИТЕЛЬНЫМ ВЕСОМ НЕПРЕРЫВНОЙ НА ОТРЕЗКЕ ФУНКЦИИ

© 2015 г. А.-Р.К. Рамазанов, В.Г. Магомедова, Б.М. Ибрагимов

Рамазанов Абдул-Рашид Кехриманович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа, декан факультета математики и компьютерных наук, Дагестанский государственный университет, ул. Гаджиева, 43а, г. Махачкала, РД, 367000; главный научный сотрудник, Дагестанский научный центр РАН, ул. Гаджиева, 45, г. Махачкала, РД, 367025, e-mail: ar-ramazanov@rambler.ru

Ramazanov Abdul-Rashid Kekhrimanovich – Doctor of Physical and Mathematical Science, Professor, Head of Department of Mathematical Analysis, Dean of the Faculty of Mathematics and Computer Science, Dagestan State University, Gadzhiev St., 43a, Makhachkala, DR, 367000, Russia; Main Researcher, Dagestan Scientific Centre of Russian Academy of Sciences, Gadzhiev St., 45, Makhachkala, DR, 367025, Russia, e-mail: ar-ramazanov@rambler.ru

Магомедова Вазипат Гусеновна – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математического анализа, Дагестанский государственный университет, ул. Гаджиева, 43а, г. Махачкала, РД, 367000; кафедра математики, Дагестанский государственный институт народного хозяйства, ул. Атаева, 5, г. Махачкала, РД, 367008, e-mail: vazipat@rambler.ru

Magomedova Vazipat Gusenovna – Candidate of Physical and Mathematical Science, Associate Professor, Department of Mathematical Analysis, Dagestan State University, Gadzhiev St., 43a, Makhachkala, DR, 367000, Russia; Department of Mathematics, Dagestan State Institute of National Economy, Ataev St., 5, Makhachkala, DR, 367008, Russia, e-mail: vazipat@rambler.ru

Ибрагимов Белла Муслимовна – старший преподаватель, кафедра математики, Дагестанский государственный институт народного хозяйства, ул. Атаева, 5, г. Махачкала, РД, 367008, e-mail: i.bella22@mail.ru

Ibragimova Bella Muslimovna – Senior Lecturer, Department of Mathematics, Dagestan State Institute of National Economy, Ataev St., 5, Makhachkala, DR, 367008, Russia, e-mail: i.bella22@mail.ru

Для модуля непрерывности произвольного порядка непрерывной на отрезке функции в метрике знакочувствительного веса дана оценка через модуль непрерывности следующего за ним порядка. Построены также другие модули непрерывности со знакочувствительным весом. Получена оценка, устанавливающая связь для их произвольных порядков. Обе полученные оценки обобщают на метрику знакочувствительного веса классическое неравенство Маршо для равномерных модулей непрерывности, имеющее широкое применение в теории приближения, теории вложения классов функций и других разделах математики.

Ключевые слова: модуль непрерывности, модуль гладкости, знакочувствительный вес, непрерывные функции, неравенство Маршо, классы функций, теоремы вложений.

For modulus of continuity of arbitrary degree of function continuous on segment in metrics of signsensitive weight estimation over modulus of continuity of the next degree is given. In addition, other modules of continuity with signsensitive weight are constructed and the estimation establishing relation for their arbitrary degrees is obtained. Both estimations obtained in the work generalize on metrics of signsensitive weight classical Marchaud inequality for uniform modules of continuity, which has wide application in approximation theory, in theory of embedding classes of functions and in other sections of mathematics.

Keywords: modulus of continuity, modulus of smoothness, signsensitive weight, continuous functions, Marchaud inequality, classes of functions, embedding theorems.

Следуя [1, 2], знакочувствительным весом на данном отрезке $[a, b]$ назовём упорядоченную пару $p(x) = (p_-(x), p_+(x))$ неотрицательных на этом отрезке функций $p_-(x)$ и $p_+(x)$. Если при этом функции $p_-(x)$ и $p_+(x)$ непрерывны на $[a, b]$, то вес $p(x)$ также называется непрерывным на нём.

Для непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ относительно веса $p(x) = (p_-(x), p_+(x))$ определяется p -норма $|f|_p = |f|_{p, [a, b]} = \sup\{(f, p)(x) : x \in [a, b]\}$, где $(f, p)(x) = f^+(x)p_+(x) - f^-(x)p_-(x)$ – разложе-

ние функции $f(x)$ по весу $p(x)$; при этом $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ и $f^-(x) = (-f(x))^+$ означают соответственно плюс- и минус-срезки функции $f(x)$.

Заметим, что для p -нормы выполняется неравенство треугольника, а первая и вторая аксиомы нормы, вообще говоря, не выполняются; хотя для любой непрерывной на $[a, b]$ функции $f(x)$ имеем $|f|_p \geq 0$ и $|\alpha f|_p = \alpha |f|_p$ при $\alpha \geq 0$, но не всегда $|-f|_p = |f|_p$.

В случае веса $p(x)=(1,1)$, очевидно, p -норма любой непрерывной на $[a, b]$ функции $f(x)$ совпадает с её равномерной нормой $\|f\| = \sup \{f(x) : x \in [a, b]\}$.

Пусть k – данное натуральное число; функция $f(x)$ и вес $p(x)=(p_-(x), p_+(x))$ непрерывны на отрезке $[a, b]$. Через конечную разность

$$\Delta_h^k f(x) = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} C_k^i f(x+ih) \quad k\text{-го порядка функции } f(x) \text{ в точке } x \text{ с шагом } h$$

определим модуль непрерывности k -го порядка функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ относительно p -нормы равенством

$$\omega_k(f, p, \delta) = \quad (1)$$

$$= \sup \left\{ \left| (\Delta_h^k f, p)(x) \right| : x, x+kh \in [a, b], |h| \leq \delta \right\}$$

при $\delta \in \left[0, \frac{b-a}{k}\right]$, считая

$$\omega_k(f, p, \delta) = \omega_k\left(f, p, \frac{b-a}{k}\right) \text{ при } \delta > \frac{b-a}{k}.$$

Заметим, что для единичного веса $p(x)=(1,1)$ величина $\omega_k(f, p, \delta)$ совпадает с обычным равномерным модулем непрерывности k -го порядка $\omega_k(f, \delta)$, причем в этом частном случае веса в определении (1) неравенство $|h| \leq \delta$ можно заменить на $0 \leq h \leq \delta$. Получится эквивалентное определение $\omega_k(f, \delta) = \sup \left\{ \Delta_h^k f(x) : x, x+kh \in [a, b], 0 \leq h \leq \delta \right\}$.

Такая возможность «редукции» определения $\omega_k(f, \delta)$ существенно используется при доказательстве их важных свойств, а также при их обобщениях на симметричные полунормы (см., например, [3–6]). Однако такая редукция определения $\omega_k(f, p, \delta)$, вообще говоря, приводит к его «сужению».

Действительно, пусть $f(x)=1-x$, $p_-(x) \equiv 0$, $p_+(x)=x$ при $x \in [0, 1]$; $k=1$. Тогда при $x, x+h \in [0, 1]$ имеем $\Delta_h^1 f(x) = -h$, а значит, $\left| (\Delta_h^1 f, p)(x) \right| \equiv 0$ при $0 \leq h \leq \delta \leq 1$, в то время как $\omega_1(f, p, \delta) = \delta$.

В теории приближений, а также при изучении вопросов соотношений между различными классами функций важную роль играют взаимосвязи между структурными характеристиками одной и той же функции. В частности, достаточно трудной является задача оценки модуля непрерывности данного порядка через ее модуль непрерывности более высокого порядка. Для равномерных модулей непрерывности произвольного порядка такая оценка получена А. Маршо [7]; более про-

стую по форме оценку снизу модуля непрерывности второго порядка через модуль непрерывности первого порядка получил Р.М. Тригуб [8]. Различным обобщениям и приложениям неравенства Маршо посвящен ряд работ (см., например, [9, 10] и цитированную в них литературу).

Ниже рассматривается вопрос оценки $\omega_k(f, p, \delta)$ при произвольном натуральном k непрерывных на данном отрезке одной и той же функции $f(x)$ и одного и того же знакочувствительного веса $p(x)=(p_-(x), p_+(x))$.

Как известно (см., например, [3, 4]), многие важные прямые и обратные теоремы теории приближения в равномерной метрике выражаются в терминах одной и той же структурной характеристики – модуля непрерывности $\omega_k(f, \delta)$ заданного порядка k . Однако в случае полиномиальных аппроксимаций непрерывных функций $f(x)$ с непрерывным знакочувствительным весом $p(x)=(p_-(x), p_+(x))$ (см., например, [11, 12]) роль такой структурной характеристики играет уже величина $\Omega_k(f, p, \delta) = \omega_k(f, p, \delta) + \omega_k(f, \delta)\omega(p, \delta)$, в которой наряду с k -м модулем непрерывности функции $f(x)$ относительно веса $p(x)$ участвуют k -й равномерный модуль непрерывности $\omega_k(f, \delta)$ и модуль непрерывности самого веса $\omega(p, \delta) = \max\{\omega_1(p_-, \delta), \omega_1(p_+, \delta)\}$ ($\delta \geq 0$).

Ниже получена также оценка сверху $\Omega_i(f, p, \delta)$ через $\Omega_k(f, p, \delta)$ для $k > i$ ($i, k \in \mathbb{N}$).

Теорема. Пусть функция $f(x)$ и знакочувствительный вес $p(x)=(p_-(x), p_+(x))$ непрерывны на отрезке $[a, b]$. Тогда для любого натурального k при $0 < \delta \leq \frac{b-a}{4k}$ выполняются неравенства

$$\omega_k(f, p, \delta) \leq M_1 M(f, p) \frac{\delta^k}{(b-a)^k} + \quad (2)$$

$$+ M_2 \delta^k \int_{\delta}^{\frac{b-a}{2k}} \frac{1}{t^{k+1}} \Omega_{k+1}(-f, p, t) dt,$$

$$\Omega_k(f, p, \delta) \leq M_3 M(f, p) \frac{\delta^k}{(b-a)^k} + \quad (3)$$

$$+ M_4 \delta^k \int_{\delta}^{\frac{b-a}{2k}} \frac{1}{t^{k+1}} \Omega_{k+1}(-f, p, t) dt,$$

где $M_1 = 3k(16k)^k$, $M_2 = \frac{1}{2}k^2(k+3)^2$,

$$M_3 = 4k(16k)^k, \quad M_4 = k^2(k+3)^2,$$

$$M(f, p) = \frac{1}{2} \left(|f|_p + |-f|_p + \|f\| \omega \left(p, \frac{b-a}{2} \right) \right).$$

Неравенство (3) связывает одного и того же типа модули непрерывности двух соседних порядков, что позволяет получить следующий аналог общего неравенства Маршо для знакочувствительных весов.

Следствие. В условиях теоремы при каждом $i = 1, 2, \dots, k$ имеет место неравенство

$$\Omega_i(f, p, \delta) \leq A_k \delta^i \left(\frac{M(f, p)}{(b-a)^i} + \int_{\delta}^{\frac{b-a}{2^i}} \frac{1}{t^{i+1}} \Omega_{k+1}((-1)^{k-i+1} f, p, t) dt \right), \quad (4)$$

где коэффициент A_k зависит лишь от k и, как и выше, $M(f, p) = \frac{1}{2} \left(|f|_p + |-f|_p + \|f\| \omega \left(p, \frac{b-a}{2} \right) \right)$.

Заметим, что в случае знакочувствительного веса $p(x) = (p_-(x), p_+(x))$ с постоянными компонентами $p_-(x) \equiv \alpha \geq 0$ и $p_+(x) \equiv \beta \geq 0$ из неравенства (4) непосредственно вытекает неравенство

$$\omega_i(f, p, \delta) \leq A_k \delta^i \left(\frac{M(f, p)}{(b-a)^i} + \int_{\delta}^{\frac{b-a}{2^i}} \frac{1}{t^{i+1}} \omega_{k+1}((-1)^{k-i+1} f, p, t) dt \right),$$

причем $M(f, p) = \frac{1}{2} (|f|_p + |-f|_p)$.

Доказательство теоремы. Пусть $0 < \delta \leq \frac{b-a}{4k}$.

Тогда $\frac{b-a}{2k\delta} \geq 2$, поэтому существует натуральное n такое, что

$$n \leq \log_2 \frac{b-a}{2k\delta} < n+1. \quad (5)$$

Фиксируем $h \neq 0$ с $|h| \leq \delta$. Тогда из (5) получим, что при любом $x \in \left[a, \frac{a+b}{2} \right]$, если $h > 0$, и при любом $x \in \left[\frac{a+b}{2}, b \right]$, если $h < 0$, точки $x + k \cdot 2^m h$ ($m = 0, 1, \dots, n$) также принадлежат отрезку $[a, b]$. Значит, при этих условиях имеет место равенство

$$\begin{aligned} |(\Delta_h^k f, p)(x)| &= \frac{1}{2^{nk}} |(\Delta_{2^n h}^k f, p)(x)| + \\ &+ \sum_{m=1}^n \left\{ \frac{1}{2^{(m-1)k}} |(\Delta_{2^{m-1} h}^k f, p)(x)| - \frac{1}{2^{mk}} |(\Delta_{2^m h}^k f, p)(x)| \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Для оценки первого слагаемого в правой части учтем, что по неравенству (5) имеем $2^n |h| \leq 2^n \delta \leq \frac{b-a}{2k}$, $\frac{1}{2^{n-1}} < \frac{8k\delta}{b-a}$.

Тогда

$$\begin{aligned} |(\Delta_{2^n h}^k f, p)(x)| &\leq \sum_{i=0}^k C_k^i |(-1)^{k-i} f|_p + \sum_{i=0}^k C_k^i \|f\| \omega \left(p, i 2^n \delta \right) \leq \\ &\leq k 2^k M(f, p), \text{ где по принятому выше обозначению} \end{aligned}$$

$$M(f, p) = \frac{1}{2} \left(|f|_p + |-f|_p + \|f\| \omega \left(p, \frac{b-a}{2} \right) \right);$$

$$\frac{1}{2^{nk}} |(\Delta_{2^n h}^k f, p)(x)| \leq \left(\frac{8k}{b-a} \right)^k k M(f, p) \delta^k. \quad (7)$$

Для оценки второго слагаемого в правой части равенства (6) воспользуемся преобразованием Маршо для конечных разностей ([7]; см. также [3, с. 165 или 4, с. 118]):

$$\begin{aligned} 2^k \Delta_t^k f(x) - \Delta_{2t}^k f(x) &= - \sum_{j=1}^k C_k^j \sum_{i=0}^{j-1} \Delta_t^{k+1} f(x + it) \text{ при} \\ t &= 2^{m-1} h \quad (m = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Из этого равенства, переходя к срезкам $[\cdot]^+$ с умножением на $p_+(x)$ и к срезкам $[\cdot]^-$ с умножением на $p_-(x)$, получим два неравенства, почленно сложив которые, имеем

$$\begin{aligned} 2^m |(\Delta_{2^{m-1} h}^k f, p)(x)| - |(\Delta_{2^m h}^k f, p)(x)| &\leq \\ &\leq \sum_{j=1}^k C_k^j \sum_{i=0}^{j-1} [- \Delta_{2^{m-1} h}^{k+1} f(x + i 2^{m-1} h)]^+ p_+(x) + \\ &+ [- \Delta_{2^{m-1} h}^{k+1} f(x + i 2^{m-1} h)]^- p_-(x) \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^k C_k^j \sum_{i=0}^{j-1} \left\{ |(-\Delta_{2^{m-1} h}^{k+1} f, p)(x + i 2^{m-1} h)| + \right. \\ &+ |(\Delta_{2^{m-1} h}^{k+1} f, p)(x + i 2^{m-1} h)| \omega(p, i 2^{m-1} |h|) \Big\} \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^k C_k^j \sum_{i=0}^{j-1} \{ \omega_{k+1}(-f, p, 2^{m-1} \delta) + \\ &+ i \omega_{k+1}(f, 2^{m-1} \delta) \omega(p, 2^{m-1} \delta) \} = \\ &= k 2^{k-1} \omega_{k+1}(-f, p, 2^{m-1} \delta) + (k-1) k 2^{k-3} \times \\ &\times \omega_{k+1}(f, 2^{m-1} \delta) \omega(p, 2^{m-1} \delta) \leq \\ &\leq \frac{k(k+3)}{8} 2^k \Omega_{k+1}(-f, p, 2^{m-1} \delta). \end{aligned}$$

Ясно, что функция $\Omega_{k+1}(-f, p, t)$ не убывает при $t \in \left[0, \frac{b-a}{2k} \right]$.

Применив эту оценку и оценку (7), из равенства (6) получим

$$\begin{aligned} |(\Delta_h^k f, p)(x)| &\leq k \left(\frac{8k}{b-a} \right)^k M(f, p) \delta^k + \\ &+ \frac{k(k+3)}{8} \sum_{m=1}^n \frac{1}{2^{(m-1)k}} \Omega_{k+1}(-f, p, 2^{m-1} \delta) \leq \end{aligned}$$

$$\leq k \left(\frac{8k}{b-a} \right)^k M(f, p) \delta^k + \\ + \frac{k(k+3)}{8} \sum_{m=1}^n 2k \delta^k \int_{\frac{2^{m-1}\delta}{t^{k+1}}}^{\frac{2^m\delta}{t^{k+1}}} \Omega_{k+1}(-f, p, t) dt.$$

Отсюда и из (5) следует, что при любом $x \in \left[a, \frac{a+b}{2} \right]$ в случае $0 < h \leq \delta$ и любом $x \in \left[\frac{a+b}{2}, b \right]$ в случае $-\delta \leq h < 0$ выполняется неравенство

$$\left| (\Delta_h^k f, p)(x) \right| \leq k \left(\frac{8k}{b-a} \right)^k M(f, p) \delta^k + \\ + \frac{k^2(k+3)}{4} \delta^k \int_{\frac{b-a}{\delta}}^{\frac{2k}{t^{k+1}}} \Omega_{k+1}(-f, p, t) dt. \quad (8)$$

Фиксируем теперь $h \neq 0$ такое, что $|h| \leq \delta$, и возьмем точки $x, x+kh \in \left[\frac{a+b}{2}, b \right]$ в случае $h > 0$ и точки $x, x+kh \in \left[a, \frac{a+b}{2} \right]$ в случае $h < 0$. Для этих случаев также оценим величину $\left| (\Delta_h^k f, p)(x) \right|$.

Возьмем вспомогательные функцию $g(y)$ и вес $q(y) = (q_-(y), q_+(y))$, определяемые при $y \in [a, b]$ равенствами $g(y) = -f(a+b-y)$, $q_{\pm}(y) = p_{\pm}(a+b-y)$.

Ясно, что функция $g(y)$ и вес $q(y)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$; при этом $\|g\| = \|f\|$, $\|q\| = \|p\|$, $\omega(q, \delta) = \omega(p, \delta)$, $\omega_r(g, \delta) = \omega_r(f, \delta)$ ($r=1, 2, \dots; \delta \geq 0$) и для любых $x, x+kh \in [a, b]$ выполняется равенство

$$\left| (\Delta_h^k f, p)(x) \right| = \left| (\Delta_h^k (-1)^{k+1} g, q)(a+b-x-kh) \right| + \\ + \left[\Delta_h^k (-1)^{k+1} g(a+b-x-kh) \right]^+ (p_+(x) - p_+(x+kh)) + \\ + \left[\Delta_h^k (-1)^{k+1} g(a+b-x-kh) \right]^- (p_-(x) - p_-(x+kh)).$$

Следовательно,

$$\left| (\Delta_h^k f, p)(x) \right| \leq \left| (\Delta_h^k (-1)^{k+1} g, q)(a+b-x-kh) \right| + \\ + k \omega(p, \delta) \left| \Delta_h^k g(a+b-x-kh) \right|. \quad (9)$$

В случае $0 < h \leq \delta$ точки $x, x+kh$ взяты из отрезка $\left[\frac{a+b}{2}, b \right]$, а поэтому точки

$$a+b-x, a+b-x-kh \in \left[a, \frac{a+b}{2} \right].$$

Значит, в неравенстве (9) для оценки $\Delta_h^k g(a+b-x-kh)$ через обычные равномерные модули непрерывности $(k+1)$ -го порядка можно при-

менить оценку Маршо для подобного расположения точек (см., например, [3, с. 166]), согласно которой получим

$$\left| \Delta_h^k g(a+b-x-kh) \right| \leq \\ \leq \|g\| 2^k \left(\frac{8k\delta}{b-a} \right)^k + 2k\delta^k \int_{\frac{b-a}{\delta}}^{\frac{2k}{t^{k+1}}} \frac{1}{t^{k+1}} \omega_{k+1}(g, t) dt.$$

Поэтому с учетом монотонности $\omega(p, \delta)$ для второго слагаемого правой части (9) имеем

$$k \omega(p, \delta) \left| \Delta_h^k g(a+b-x-kh) \right| \leq \\ \leq \left(\frac{16k}{b-a} \right)^k k \|f\| \omega(p, \delta) \delta^k + \\ + 2k^2 \delta^k \int_{\frac{b-a}{\delta}}^{\frac{2k}{t^{k+1}}} \frac{1}{t^{k+1}} \omega_{k+1}(f, t) \omega(p, t) dt. \quad (10)$$

Вполне аналогично доказывается, что оценка (10) остается справедливой и в случае $-\delta \leq h < 0$, если точки x и $x+kh$ берутся на отрезке $\left[a, \frac{a+b}{2} \right]$.

Для оценки первого слагаемого правой части неравенства (9) к функции $(-1)^{k+1} g(y)$ и весу $q(y)$ применим полученное выше неравенство (8). Дело в том, что у нас в одном рассматриваемом случае $x, x+kh \in \left[\frac{a+b}{2}, b \right]$ и $0 < h \leq \delta$, а поэтому точки

$$a+b-x, a+b-x-kh \in \left[a, \frac{a+b}{2} \right];$$

во втором же случае $x, x+kh \in \left[a, \frac{a+b}{2} \right]$ и $-\delta \leq h < 0$, а поэтому

$$a+b-x, a+b-x-kh \in \left[\frac{a+b}{2}, b \right].$$

Значит, в обоих случаях к функции $(-1)^{k+1} g(y)$ и весу $q(y)$ применимо неравенство (8), что дает

$$\left| (\Delta_h^k (-1)^{k+1} g, q)(a+b-x-kh) \right| \leq k \delta^k \left(\frac{8k}{b-a} \right)^k M(g, q) + \\ + \frac{k^2(k+3)}{4} \delta^k \int_{\frac{b-a}{\delta}}^{\frac{2k}{t^{k+1}}} \frac{1}{t^{k+1}} \left\{ \omega_{k+1}((-1)^k g, q, t) + \omega_{k+1}(g, t) \omega(q, t) \right\} dt. \quad (11)$$

Здесь $\omega_{k+1}(g, t) = \omega_{k+1}(f, t)$, $\omega(q, t) = \omega(p, t)$, $M(g, q) = M(f, p)$. Оценим $\omega_{k+1}((-1)^k g, q, t)$ при $\delta \leq t \leq \frac{b-a}{2k}$.

Пусть при $|\tau| \leq t$ точки $y, y+(k+1)\tau \in [a, b]$. Тогда

$$\left| (\Delta_{\tau}^{k+1} (-1)^k g, q)(y) \right| = \left| (\Delta_{\tau}^{k+1} (-1)f, p)(a+b-y-(k+1)\tau) \right| +$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\Delta_{\tau}^{k+1}(-1)f(a+b-y-(k+1)\tau) \right]^+ \times \\
& \times (p_+(a+b-y) - p_+(a+b-y-(k+1)\tau)) + \\
& + \left[\Delta_{\tau}^{k+1}(-1)f(a+b-y-(k+1)\tau) \right]^- \times \\
& \times (p_-(a+b-y) - p_-(a+b-y-(k+1)\tau)) \leq \\
& \leq \omega_{k+1}(-f, p, t) + (k+1)\omega(p, t)\omega_{k+1}(f, t).
\end{aligned}$$

Отсюда, переходя к супремумам в крайней левой части, получим

$$\begin{aligned}
\omega_{k+1}((-1)^k g, q, t) & \leq \\
& \leq \omega_{k+1}(-f, p, t) + (k+1)\omega_{k+1}(f, t)\omega(p, t).
\end{aligned} \quad (12)$$

Следовательно, из (9)–(12) имеем: если $|h| \leq \delta$ и при этом точки x и $x+kh$ берутся из отрезка $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ в случае $h > 0$ и из отрезка $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ в случае $h < 0$, то выполняется неравенство

$$\begin{aligned}
|(\Delta_h^k f, p)(x)| & \leq 3k \left(\frac{16k}{b-a} \right)^k M(f, p)\delta^k + \\
& + \frac{k^2(k+3)^2}{2} \delta^k \int_{\delta}^{\frac{b-a}{2k}} \frac{1}{t^{k+1}} \Omega_{k+1}(-f, p, t) dt.
\end{aligned} \quad (13)$$

Отсюда и из (8) вытекает, что неравенство (13) фактически выполняется при $|h| \leq \delta$ для всех $x, x+kh \in [a, b]$, а значит, требуемое неравенство (2) получено.

Для доказательства неравенства (3) применим следующее неравенство Маршо (см., например, [3, с. 166]):

$$\omega_k(f, \delta) \leq \left(\frac{8k}{b-a} \right)^k \|f\| \delta^k + 2k \delta^k \int_{\delta}^{\frac{b-a}{2k}} \frac{1}{t^{k+1}} \omega_{k+1}(f, t) dt, \quad (14)$$

справедливое при любом натуральном k и $0 < \delta \leq \frac{b-a}{4k}$.

Учтем также, что $\omega(p, t)$ является неубывающей функцией относительно $t \geq 0$ и, очевидно, $\omega_{k+1}(-f, t) = \omega_{k+1}(f, t)$. Отсюда из (2) и (14) получим второе требуемое в теореме неравенство (3):

$$\begin{aligned}
\Omega_k(f, p, \delta) & = \omega_k(f, p, \delta) + \omega_k(f, \delta)\omega(p, \delta) \leq \\
& \leq 4k \left(\frac{16k}{b-a} \right)^k M(f, p)\delta^k + \\
& + k^2(k+3)^2 \delta^k \int_{\delta}^{\frac{b-a}{2k}} \frac{1}{t^{k+1}} \Omega_{k+1}(-f, p, t) dt.
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Доказательство следствия. Пусть по индуктивному предположению доказываемое неравенство (4) имеет место для произвольного натурального

числа $i+1$ такого, что $1 < i+1 \leq k$. Докажем (4) для числа i .

Из неравенства (3) в случае $k=i$ для $M = 4i(16i)^i$ вытекает неравенство

$$\Omega_i(f, p, \delta) \leq M \delta^i \left(\frac{M(f, p)}{(b-a)^i} + \int_{\delta}^{\frac{b-a}{2i}} \frac{1}{t^{i+1}} \Omega_{i+1}(-f, p, t) dt \right),$$

при этом по допущению

$$\begin{aligned}
& \Omega_{i+1}(-f, p, t) \leq \\
& \leq A t^{i+1} \left(\frac{M(f, p)}{(b-a)^{i+1}} + \int_t^{\frac{b-a}{2i+2}} \frac{1}{u^{i+2}} \Omega_{k+1}((-1)^{k+1-(i+1)}(-f), p, u) du \right).
\end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned}
\Omega_i(f, p, \delta) & \leq M \delta^i \left\{ \frac{M(f, p)}{(b-a)^i} + \int_{\delta}^{\frac{b-a}{2i}} A \left(\frac{M(f, p)}{(b-a)^{i+1}} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \int_t^{\frac{b-a}{2i+2}} \frac{1}{u^{i+2}} \Omega_{k+1}((-1)^{k-i+1} f, p, u) du \right) dt \right\} \leq \\
& \leq M \delta^i \left\{ \frac{M(f, p)}{(b-a)^i} + A \frac{M(f, p)}{(b-a)^{i+1}} \cdot \frac{b-a}{2i} + \right. \\
& \left. + \int_{\delta}^{\frac{b-a}{2i}} dt \int_t^{\frac{b-a}{2i+2}} \frac{1}{u^{i+2}} \Omega_{k+1}((-1)^{k-i+1} f, p, u) du \right\}.
\end{aligned}$$

Изменив порядок интегрирования в последнем повторном интеграле, получим

$$\begin{aligned}
& \Omega_i(f, p, \delta) \leq \\
& \leq M \delta^i \left\{ \left(1 + \frac{A}{2i} \right) \frac{M(f, p)}{(b-a)^i} + \int_{\delta}^{\frac{b-a}{2i}} \frac{1}{u^{i+1}} \Omega_{k+1}((-1)^{k-i+1} f, p, u) du \right\} \leq \\
& \leq M \left(1 + \frac{1}{2} A \right) \delta^i \left(\frac{M(f, p)}{(b-a)^i} + \int_{\delta}^{\frac{b-a}{2i}} \frac{1}{u^{i+1}} \Omega_{k+1}((-1)^{k-i+1} f, p, u) du \right).
\end{aligned}$$

Остается учесть, что $i < k$, $M = 4i(16i)^i < 4k(16k)^k$ и параметр A зависит лишь от k .

Литература

1. Долженко Е.П., Севастьянов Е.А. Аппроксимация со знакочувствительным весом (теоремы существования и единственности) // Изв. РАН. Математика. 1998. Т. 62, № 6. С. 59–102.
2. Долженко Е.П., Севастьянов Е.А. Аппроксимация со знакочувствительным весом (устойчивость,

приложения к теории ужей и хаусдорфовым аппроксимациям) // Изв. РАН. Математика. 1999. Т. 63, № 3. С. 77–118.

3. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М., 1977. 512 с.

4. Тиман А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного. М., 1961. 624 с.

5. Жук В.В. Лекции по теории аппроксимации. СПб., 2008. 396 с.

6. Шевчук И.А. Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций. Киев, 1992. 225 с.

7. Marchaud A. Sur les derives et sur les differences des fonctions de variables reelles // J. Math. Pures et Appl. 1927. Vol. 6. P. 337–425.

8. Тригуб Р.М. Приближение функций с данным модулем гладкости на внешности отрезка и полуоси // Докл. АН СССР. 1993. Т. 132, № 2. С. 303–306.

9. Dai F., Ditzian Z. Littlewood–Paley theory and sharp Marchaud inequality // Acta Sci. Math. (Szeged). 2005. Vol. 71. P. 65–90.

10. Ditzian Z., Prymak A. Sharp Marchaud and converse inequalities in Orlicz spaces // Proc. Amer. Math. Soc. 2007. Vol. 135. P. 1115–1121.

11. Рамазанов А.-Р.К. О прямых и обратных теоремах теории аппроксимации в метрике знакочувствительного веса // Analysis Mathematica. 1995. Vol. 21. P. 191 – 212.

12. Ибрагимова Б.М. Оценка полиномиальных приближений функций через модули гладкости относительно знакочувствительного веса // Математика. Экономика. Образование : тез. докл. XXII Междунар. конф. Ростов н/Д., 2014. С. 78.

References

1. Dolzhenko E.P., Sevast'yanov E.A. Approksimatsii so znachuvstvitel'nym vesom (teoremy sushchestvovaniya i edinstvennosti) [Approximations with a sign-sensitive weight (existence and uniqueness)]. *Izvestiya RAN. Matematika*, 1998, vol. 62, no 6, pp 59-102.

2. Dolzhenko E.P., Sevast'yanov E.A. Approksimatsiya so znachuvstvitel'nym vesom (ustoichivost', prilozheniya k teorii uzhei i khausdorfovym approksimatsiyam) [Approximation with weight (resistance, applications to the theory of snakes and Hausdorff approxima-

tions)]. *Izvestiya RAN. Matematika*, 1999, vol. 63, no 3, pp. 77-118.

3. Dzyadyk V.K. *Vvedenie v teoriyu ravnomernogo priblizheniya funktsii polinomami* [Introduction to the theory of uniform approximation of functions by polynomials]. Moscow, 1977, 512 p.

4. Timan A.F. *Teoriya priblizheniya funktsii deistvitel'nogo peremennogo* [Theory of approximation of functions of a real variable]. Moscow, 1961, 624 p.

5. Zhuk V.V. *Leksii po teorii approksimatsii* [Lectures on the theory of approximation]. Saint Petersburg, 2008, 396 p.

6. Shevchuk I.A. *Priblizhenie mnogochlenami i sledy nepreryvnykh na otrezke funktsii* [Approximation by polynomials and traces of continuous functions on the segment]. Kiev, 1992, 225 p.

7. Marchaud M.A. Sur les dérivées et sur les différences des fonctions de variables réelles. *J. Math. Pures et Appl.*, 1927, vol. 6, pp. 337-425.

8. Trigub R.M. Priblizhenie funktsii s dannym modulem gladkosti na vneshnosti otrezka i poluosi [Approximation of functions with given modulus of smoothness on the exterior of an interval and the half-line]. *Doklady AN SSSR*, 1993, vol. 132, no 2, pp. 303-306.

9. Dai F., Ditzian Z. Littlewood–Paley theory and sharp Marchaud inequality. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 2005, vol. 71, pp. 65-90.

10. Ditzian Z., Prymak A. Sharp Marchaud and converse inequalities in Orlicz spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2007, vol. 135, pp. 1115-1121.

11. Ramazanov A.-R.K. O pryamykh i obratnykh teoremax teorii approksimatsii v metrike znachuvstvitel'nogo vesa [On direct and inverse theorems of approximation theory and the metric sign-sensitive weight]. *Analysis Mathematica*, 1995, vol. 21, pp. 191-212.

12. Ibragimova B.M. [Evaluation of polynomial approximations of functions with respect to the modulus of smoothness of sign-sensitive weight]. *Matematika. Ekonomika. Obrazovanie* [Mathematics. Economy. Education]: Abstracts of the 22 Intern. Conf. Rostov-on-Don, 2014, p. 78.

УДК 517.944

СУЩЕСТВОВАНИЕ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ МОДЕЛЕЙ МАРГЕРРА – ВЛАСОВА ТЕРМОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК С МАЛОЙ ИНЕРЦИЕЙ ПРОДОЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

© 2015 г. В.И. Седенко, Т.В. Богачев, Т.В. Алексейчик

Седенко Василий Игоревич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой фундаментальной и прикладной математики, Ростовский государственный экономический университет, ул. Б. Садовая, 69, г. Ростов н/Д, 344002, e-mail: visedenko@mail.ru

Sedenko Vasilii Igorevich – Doctor of Physical and Mathematical Science, Professor, Head of Department of the Fundamental and Applied Mathematics, Rostov State Economic University, B. Sadovaya St., 69, Rostov-on-Don, 344002, Russia, e-mail: visedenko@mail.ru

Богачев Тарас Викторович – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра фундаментальной и прикладной математики, Ростовский государственный экономический университет, ул. Б. Садовая, 69, г. Ростов н/Д, 344002, e-mail: bogachev73@yandex.ru

Bogachev Taras Viktorovich – Candidate of Physical and Mathematical Science, Associate Professor, Department of the Fundamental and Applied Mathematics, Rostov State Economic University, B. Sadovaya St., 69, Rostov-on-Don, 344002, Russia, e-mail: bogachev73@yandex.ru

Алексейчик Тамара Васильевна – кандидат экономических наук, доцент, кафедра фундаментальной и прикладной математики, Ростовский государственный экономический университет, ул. Б. Садовая, 69, г. Ростов н/Д, 344002, e-mail: alekseychik48@mail.ru

Alekseichik Tamara Vasil'evna – Candidate of Economic Science, Associate Professor, Department of the Fundamental and Applied Mathematics, Rostov State Economic University, B. Sadovaya St., 69, Rostov-on-Don, 344002, Russia, e-mail: alekseychik48@mail.ru

Доказываются теоремы существования слабых решений моделей Маргерра – Власова, учитывающих эволюцию тепла, инерцию поворота точки оболочки, внутреннее трение в оболочке. Определяются приближения Бубнова – Галеркина. Доказывается локальная разрешимость системы обыкновенных дифференциальных уравнений для временных коэффициентов приближений. Описываются дифференциальные свойства. Наличие энергетического соотношения позволяет обосновать продолжимость приближений на любой промежуток времени и получить равномерные по номерам приближения оценки. С помощью соображений сильной и слабой компактности предельный подход позволяет получить интегральные соотношения, определяющие слабое решение.

Ключевые слова: термоупругость, слабые решения, глобальные по времени оценки, слабая компактность, сильная компактность, дифференциальные свойства.

In this paper prove the theorem of existence of weak solutions Marguerre - Vlasov's models with the evolution of the heat, the inertia of the turn of the casing's point, the inner friction in the casing. It define the approximation of Bubnov - Galerkin. It prove the local existence the system of partial differential equations for time coefficients of approximation. We study it differential properties. We prove with the energetic correlation the existence of approximation for the every section of a time and the existence of the equilibriums valuations of the approximation, which helps to prove integral correlations, defined of the weak solutions.

Keywords: termoelastic, weak solutions, global in time estimates, weak compactness, strong compactness, differential properties.

Рассматривается один из аспектов глобальной по времени разрешимости эволюционных динамических моделей механики сплошной среды – существование слабых решений начально-краевых задач моделей Маргерра – Власова нелинейной теории колебаний пологих оболочек, учитывающих дополнительные физические эффекты: эволюцию тепла, инерцию поворота точки оболочки, внутреннее трение в оболочке. Для этого используются средства, являющиеся развитием методов, предложенных в [1–3].

Начально-краевая задача

Пусть оболочка проектируется на плоскую ограниченную область Ω с границей Γ класса C^1 . Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} w_{tt} - \gamma \Delta w_{tt} + D \Delta^2 w + \delta \Delta^2 w_t + \alpha \Delta r = Z + (N_1 w_{x_1})_{x_1} + \\ + (N_2 w_{x_2})_{x_2} + (N_{12} w_{x_2})_{x_1} - N_1 k_1 - N_2 k_2, \\ k r_t - \beta \Delta r - \alpha \Delta w_t = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

с краевыми

$$w|_{\Gamma} = \frac{dw}{dn}|_{\Gamma} = 0, \quad r|_{\Gamma} = 0 \quad (2)$$

и начальными условиями

$$w(x,0) = w_0(x), \quad w_t(x,0) = w_1(x), \quad r(x,0) = r_0(x). \quad (3)$$

Здесь

$$N_1 = 2(1-\mu)^{-1}(\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2), \quad \varepsilon_1 = u_{x_1} + k_1 w + \frac{1}{2} w_{x_1}^2, \\ N_2 = 2(1-\mu)^{-1}(\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1), \quad (4)$$

$$\varepsilon_2 = v_{x_2} + k_2 w + \frac{1}{2} w_{x_2}^2, \quad N_{12} = \varepsilon_{12}, \quad \varepsilon_{12} = u_{x_2} + v_{x_1} + w_{x_1} w_{x_2}.$$

Функции u, v – решения краевой задачи

$$-\Delta u - \frac{1+\mu}{1-\mu} \theta_{x_1} = 2(1-\mu)^{-1}[(k_1 w)_{x_1} + w_{x_1 x_1} w_{x_1} + \\ + \mu(k_2 w)_{x_1} + \mu w_{x_1 x_2} w_{x_2}] + w_{x_1 x_2} w_{x_2} + w_{x_1} w_{x_2 x_2} + X, \\ -\Delta v - \frac{1+\mu}{1-\mu} \theta_{x_2} = 2(1-\mu)^{-1}[(k_2 w)_{x_2} + w_{x_2 x_2} w_{x_2} + \\ + \mu(k_1 w)_{x_2} + \mu w_{x_1 x_2} w_{x_1}] + w_{x_1 x_2} w_{x_1} + w_{x_2} w_{x_1 x_1} + Y, \\ \theta = u_{x_1} + v_{x_2}, \quad u|_{\Gamma} = v|_{\Gamma} = 0. \quad (5)$$

Здесь w – поперечное перемещение; u, v – продольные перемещения точки оболочки; Z, X, Y – составляющие массовых сил; k_1, k_2 – кривизны, которые считаются непрерывно дифференцируемыми; $-\gamma \Delta w_t$ определяет при $\gamma > 0$ инерцию поворота точки оболочки; $\delta \Delta^2 w_t$ описывает при $\delta > 0$ внутреннее трение в оболочке; D – изгибная жесткость; μ – упругая постоянная; N_1, N_2, N_{12} – продольные усилия в оболочке; $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{12}$ – характеристики деформации срединной поверхности оболочки; r – мера количества тепла.

Слабые решения начально-краевой задачи (1)–(5)

Функциональные пространства $M_i(\Omega \times [0, t_f])$, $i=1,2,3$ – это пополнения множества бесконечно дифференцируемых на $\Omega \times [0, t_f]$ функций, финитных на Ω при каждом фиксированном t , по нормам, порожденным скалярными произведениями

$$(w_1, w_2)_{M_1(\Omega \times [0, t_f])} = \int_0^{t_f} [(w_{1t}, w_{2t})_{L_2(\Omega)} + (w_1, w_2)_{H_2(\Omega)}] dt, \\ (w_1, w_2)_{M_2(\Omega \times [0, t_f])} = \int_0^{t_f} [(w_{1t}, w_{2t})_{H_2}^{(1)} + (w_1, w_2)_{H_2}^{(2)}] dt, \\ (w_1, w_2)_{M_3(\Omega \times [0, t_f])} = \int_0^{t_f} [(w_{1t}, w_{2t})_{H_2(\Omega)}^{(2)} + (w_1, w_2)_{H_2(\Omega)}^{(2)}] dt.$$

Здесь t_f – момент времени, на который не накладывается никаких ограничений, кроме положительности. Через $M(\Omega \times [0, t_f])$, $i=1,2,3$ обозначим замыкания в нормах $M_i(\Omega \times [0, t_f])$ множества бесконечно дифференцируемых на $\Omega \times [0, t_f]$ функций w таких, что $w(x_1, x_2, t) \equiv 0$, если $t_f - \delta \leq t \leq t_f$, где δ – некоторое положительное определенное для w число.

Слабыми решениями начально-краевой задачи (1)–(5) называются при $\delta > 0$ функции w и r , $w \in M_3(\Omega \times [0, t_f])$, $r \in M_1(\Omega \times [0, t_f])$; при $\delta = 0$ и $\gamma > 0$ – функции w и r , $w \in M_2(\Omega \times [0, t_f])$, удовлетворяющие интегральным тождествам

$$\int_0^{t_f} \int_{\Omega} [(-w_t w'_t + \gamma \nabla w'_t + D \Delta w \Delta w' + \delta \Delta w_t \Delta w' + \alpha \nabla r \nabla w' - \\ - Z w' + (N_1 k_1 + N_2 k_2) w' + N_1 w_{x_1} - N_{12} w_{x_2} w'_{x_1} + \\ + (N_2 w_{x_2} + N_{12} w_{x_1}) w'_{x_2}] dx dt + \int_{\Omega} w_1(x) w'(x, 0) - \\ - \gamma \nabla w_1(x) \nabla w'(x, 0) dx = 0, \quad (6)$$

$$\int_0^{t_f} \int_{\Omega} [-k r r'_t + \beta \nabla r \nabla r' + \alpha w_t \Delta r'] dx dt + \\ + \int_{\Omega} r_0(x) r'(x, 0) dx = 0 \quad (7)$$

для любых функций $w' \in M_2(\Omega \times [0, t_f])$, $r \in M_1(\Omega \times [0, t_f])$ и начальным условиям

$$\lim_{t \rightarrow 0} w(t)^{L_2(\Omega)} = w_0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} r(t)^{L_2(\Omega)} = r_0. \quad (8)$$

Слабые решения определены аналогично тому, как это сделано в [2, 4].

Приближения Бубнова – Галеркина решений начально-краевой задачи (1)–(5)

Как известно, задача на собственные значения $\Delta^2 \zeta = \lambda \zeta$, $\zeta|_r = \frac{d\zeta}{dn}|_r = 0$ в случае, когда $\Gamma \in C^3$, имеет ограниченные производные четвертого порядка и счетное число положительных собственных значений λ_k^1 , $k=1,2,\dots, \lambda_1^1 \leq \lambda_2^1 \leq \dots \leq \lambda_n^1 \leq \dots$, стремящихся к бесконечности, каждому из которых соответствует лишь конечное число линейно независимых собственных функций ζ_k . Собственные функции образуют полную ортонормированную

систему в $L_2(\Omega)$ и полную ортогональную систему в $H_2(\Omega)$.

Аналогично задача на собственные значения $-\Delta\zeta = \lambda\zeta$, $\zeta|_{\Gamma} = 0$ если $\Gamma \in C^1$, имеет ограниченные производные второго порядка, обладает счетным множеством положительных собственных значений λ_k^2 , $k = 1, 2, \dots$, $\lambda_1^2 \leq \lambda_2^2 \leq \dots \leq \lambda_k^2 \leq \dots, \lambda_n^2$, стремящихся к бесконечности, каждому из которых соответствует лишь конечное число линейно независимых собственных функций ζ_e . Собственные функции образуют полную ортонормированную систему в $L_2(\Omega)$ и полную ортогональную систему в $H_2(\Omega)$.

Приближения Бубнова – Галеркина для w и r будем искать соответственно в виде $w^m(x, t) = \sum_{i=1}^m a_i^m(t) \zeta_i(x)$, $r^m = \sum_{j=1}^m b_j^m(t) \zeta_j(x)$, где функции времени $a_i^m(t)$, $b_j^m(t)$, $i=1, \dots, m$, определяются как решения следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$(w_{tt}^m - \gamma \Delta w_{tt}^m + D \Delta^2 w_{tt}^m + \delta \Delta^2 w_{tt}^m + \alpha \Delta r - Z - (N_1^m w_{x_1}^m)_{x_1} - (N_2^m w_{x_2}^m)_{x_2} - (N_{12}^m w_{x_2}^m)_{x_1} - (N_{12}^m w_{x_1}^m)_{x_2} + N_1^m k_1 + N_2^m k_2, \zeta_i)_{L_2(\Omega)} = 0. \quad (9)$$

$$a_j^m(0) = (w_0, \zeta_j)_{L_2(\Omega)}, \quad \dot{a}_j^m(0) = (w_1, \zeta_j)_{L_2(\Omega)}, \quad j=1, \dots, m, \\ (k_1 r_t^m - \beta \Delta r^m - \alpha \Delta w_t^m, \zeta_j) = 0, \quad b_j^m(0) = (r_0, \zeta_j), \quad j=1, \dots, m, \quad (10)$$

где

$$N_1^m = 2(1-\mu)^{-1}(\varepsilon_1^m + \mu \varepsilon_2^m), \quad N_2^m = 2(1-\mu)^{-1}(\varepsilon_2 + \mu \varepsilon_1), \\ N_{12}^m = \varepsilon_{12}, \quad \varepsilon_1^m = u_{x_1}^m + k_1 w^m + \frac{1}{2}(w_{x_1}^m)^2, \quad (11)$$

$$\varepsilon_2^m = v_{x_2}^m + k_2 w^m + \frac{1}{2}(w_{x_2}^m)^2, \quad \varepsilon_{12}^m = u_{x_2}^m + v_{x_2}^m + w_{x_1}^m w_{x_2}^m.$$

Функции u^m, v^m являются решениями краевой задачи

$$-\Delta u^m - \frac{1+\mu}{1-\mu} \theta_{x_1}^m = \frac{2}{1-\mu} [(k_1 w^m)_{x_1} + w_{x_1 x_1}^m w_{x_1}^m + \mu(k_2 w^m)_{x_1} + \mu w_{x_1 x_2}^m w_{x_2}^m] + w_{x_1 x_2}^m w_{x_2}^m + w_{x_1 x_2}^m w_{x_1}^m + X, \\ -\Delta u^m - \frac{1+\mu}{1-\mu} \theta_{x_2}^m = \frac{2}{1-\mu} [(k_2 w^m)_{x_2} + w_{x_2 x_2}^m w_{x_2}^m + \mu(k_1 w^m)_{x_2} + \mu w_{x_1 x_2}^m w_{x_1}^m] + w_{x_1 x_2}^m w_{x_1}^m + w_{x_1 x_2}^m w_{x_2}^m + Y, \\ u^m|_{\Gamma} = v^m|_{\Gamma} = 0. \quad (12)$$

С учетом формы уравнений (9)–(12) непосредственно из теоремы Коши – Пикара следует

Теорема 1. Пусть $X, Y, Z \in C([0, t_f], L_p(\Omega))$

для некоторого $p > 1$. Тогда найдется $t_0 > 0$ такое, что на отрезке $[0, t_0]$ существуют решения $a_i^m(t) \in C^2([0, t_0])$, $i=1, \dots, m$, системы обыкновенных уравнений с начальными условиями (8), (10).

Теорема 2. В условиях теоремы 1 приближения Бубнова – Галеркина имеют следующие дифференциальные свойства:

$$w^m \in C^2([0, t_0], H_2(\Omega)) \cap C^2([0, t_0], H_2^4(\Omega)),$$

$$u^m, v^m \in C([0, t_0], H_2(\Omega)) \cap L_\infty([0, t_0], H_p^2(\Omega)),$$

$$r^m \in C^1([0, t_0], H_2(\Omega)) \cap C^1([0, t_0], H_2^2(\Omega)).$$

Кроме того, если $X, Y \in C^1([0, t_0], L_p(\Omega))$ для некоторого $p > 1$, то $u^m, v^m \in C^1([0, t_0], H_2(\Omega))$.

Теорема 2 локальна по времени. Для продолжения приближений Бубнова – Галеркина на весь отрезок времени $[0, t_f]$ используем энергетическое соотношение.

Глобальные по времени, равномерные по m оценки приближений Бубнова – Галеркина

Функционал энергии Φ для приближений Бубнова – Галеркина имеет следующий вид:

$$\Phi_m(t) = \frac{1}{2} (\|w_t^m(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 + k \|r(t)\|_{L_2(\Omega)}^2) + \frac{1}{1-\mu} \times \\ \times \int_{\Omega} [(\varepsilon_1^m(x, t))^2 + 2\mu \varepsilon_1^m(x, t) \varepsilon_2^m(x, t) + \frac{1-\mu}{2} (\varepsilon_{12}^m(x, t))^2] dx.$$

Теорема 3. В условиях теоремы 2 для всех $t_1, t_2 \in [0, t_0]$ имеет место соотношение баланса энергии

$$\Phi_m(t_2) - \Phi_m(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} (\delta \|w_t^m(t)\|_{H_2(\Omega)}^2 + \\ + \alpha \|r^m(t)\|_{H_2(\Omega)}^2) dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} X u_t^m + Y v_t^m + Z w_t^m dx dt. \quad (13)$$

Из (13) при $k > 0$ извлекаются глобальные по времени и независимые от m оценки $a_i^m(t), r_i^m(t)$, $i=1, \dots, m$, что, в частности, позволяет определить w^m и r^m на всём отрезке времени $[0, t_f]$ и получить равномерные оценки норм w^m и r^m в функциональных пространствах.

Теорема 4. В условиях теоремы 2 для всех $m \in N$ и $t \in [0, t_f]$ имеют место оценки

$$\Phi_m(t) \leq C_1, \|w_t^m(t)\|_{L_2(\Omega)} \leq C_2, \|w^m(t)\|_{H_2^{0,2}(\Omega)} \leq C_3,$$

$$\|u^m(t)\|_{H_2^{0,1}(\Omega)} + \|v^m(t)\|_{H_2^{0,1}(\Omega)} \leq C_4,$$

$$\|u^m(t)\|_{H_p^2(\Omega)} + \|v^m(t)\|_{H_p^2(\Omega)} \leq C_5, 1 < p < 2,$$

$$\|r_m(t)\|_{L_2(\Omega)} \leq C_6, \|r_m\|_{(L_2[0,t_f], H_2^{0,1}(\Omega))} \leq C_7.$$

Кроме того, если $\gamma > 0$, то $\|w_t^m(t)\|_{H_2^{0,1}(\Omega)} \leq C_8$.

Если $\delta > 0$, то $\|w_t^m(t)\|_{(L_2[0,t_f], H_2^{0,2}(\Omega))} \leq C_9$, где константы $C_i, i=1, \dots, 9$ не зависят от t и m .

Существование слабых решений (1)–(5) начально-краевой задачи (12)

Лемма 1. В условиях теоремы 2 из последовательностей w^m, r^m можно выделить подпоследовательности w^{m^1}, r^{m^1} , слабо сходящиеся к некоторым функциям в $M_1(\Omega \times [0, t_f])$ (в $M_2(\Omega \times [0, t_f])$ при $\gamma > 0$ и в $M_3(\Omega \times [0, t_f])$ при $\delta > 0$) и $L_{2,2}^{1,0}(\Omega \times [0, t_f])$ соответственно. При этом $w \in L_{2,\infty}^{2,0}(\Omega \times [0, t_f]) \cap L_{2,\infty}^{0,1}(\Omega \times [0, t_f])$ при $\gamma > 0$, $w \in L_{2,\infty}^{2,0}(\Omega \times [0, t_f]) \cap L_{2,\infty}^{1,1}(\Omega \times [0, t_f])$.

При $\delta > 0$ дополнительно $w_t \in L_{2,2}^{2,0}(\Omega \times [0, t_f])$, $r \in L_{2,\infty}^{2,0}(\Omega \times [0, t_f]) \cap L_{2,2}^{1,0}(\Omega \times [0, t_f])$.

Лемма 2. Функция $r(\cdot, t)$ слабо сходится к r_0 в $L_2(\Omega)$.

Лемма 3. В условиях теоремы 2 из последовательности w^{m^1} можно выделить подпоследовательность w^{m^2} , сходящуюся к w в $C([0, t_f], L_2(\Omega))$. Доказывается с помощью теоремы Арцела – Асколи.

Доказательство аналогично тому, которое приведено в [5, с. 222, 223].

Лемма 4. В условиях теоремы 2 последовательность w^{m^2} сходится к w в $C([0, t_f], H_2^r(\Omega))$ для всех $r \in [1, +\infty)$.

Доказывается на основе леммы 3 с использованием мультипликативных неравенств вложения Гальярдо – Ниренберга [6, 7].

Лемма 5. В условиях теоремы 2 последовательности u^{m^2}, v^{m^2} сходятся к функциям u, v в

$C([0, t_f], H_2^{0,1}(\Omega))$, где u, v – решения краевой задачи (8), где w – указанный выше предел приближений Бубнова – Галеркина.

Сходимость приближений Бубнова – Галеркина к слабым решениям

Пусть $w' \in \dot{M}_2(\Omega \times [0, t_f])$. Тогда

$$w'(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i(t) \xi_i(x).$$

$$\text{Положим } (P_{\Omega}^m w')(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i(t) \xi_i(x).$$

Очевидно, что $P_{\Omega}^m w' \rightarrow w'$ в норме $M_2(\Omega \times [0, t_f])$. Умножим (8) на $C_i(t)$, просуммируем по i от 1 до m . Получим

$$\begin{aligned} & (w_t^m - \gamma \Delta w_t^m + D \Delta^2 w^m + \delta \Delta^2 w_t^m + \alpha \Delta r - Z - (N_1^m w_{x_1}^m)_{x_1} - \\ & - (N_2^m w_{x_2}^m)_{x_2} - (N_{12}^m w_{x_2}^m)_{x_1} - (N_{12}^m w_{x_1}^m)_{x_2} + N_1^m k_1 + \\ & + N_2^m k_2, P_{\Omega}^m w')_{L_2(\Omega)} = 0. \end{aligned}$$

Проинтегрируем полученное соотношение по t от 0 до t_f с использованием интегрирования по частям. Имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \left((-w_t^m P_{\Omega}^m w'_t - \gamma \nabla w_t^m \nabla P_{\Omega}^m w'_t + D P_{\Omega}^m w'_t + \delta \Delta w_t^m \Delta P_{\Omega}^m w' + \right. \\ & + \alpha \nabla r^m \nabla P_{\Omega}^m w' - Z P_{\Omega}^m w' + (N_1^m w_{x_1}^m + N_{12}^m w_{x_2}^m) P_{\Omega}^m w'_{x_1} + \\ & + (N_2^m w_{x_2}^m + N_{12}^m w_{x_1}^m) P_{\Omega}^m w'_{x_2} \Big) dx dt + \int_{\Omega} (w_1(x) P_{\Omega}^m w'(x, 0) - \\ & - \gamma \nabla w_1(x) \nabla P_{\Omega}^m w'(x, 0)) dx = 0. \end{aligned}$$

Перейдя к пределу по m в последовательности m^2 с учётом лемм 1, 3, 4 получим (6); (7) получается аналогично и проще. Выполнение начальных условий (8) следует из лемм 2, 3. Тем самым доказана

Теорема 5. В условиях теоремы 2 существуют слабые в смысле (6)–(8) решения начально-краевой задачи (1)–(5) со следующими дифференциальными свойствами:

$$w \in L_{2,\infty}^{2,0}(\Omega \times [0, t_f]) \cap L_{2,\infty}^{0,1}(\Omega \times [0, t_f]) \cap C([0, t_f], H_2^r(\Omega))$$

для всех $r \geq 1$.

При $1 < p < 2$

$$u, v \in L_{\infty}([0, t_f], H_2^{0,1}(\Omega)) \cap L_{\infty}([0, t_f], H_p^2(\Omega)).$$

При $p \geq 2$

$$u, v \in L_{\infty}([0, t_f], H_2^{0,1}(\Omega)) \cap L_{\infty}([0, t_f], H_q^2(\Omega))$$

для всех $q < 2$.

$$\text{При } \gamma > 0 \quad w \in L_{2,\infty}^{1,1}(\Omega \times [0, t_f]).$$

При $\delta > 0$ $w \in L_{2,2}^{2,1}(\Omega \times [0, t_f])$.

Кроме того, $r \in L_{2,\infty}^{2,0}(\Omega \times [0, t_f]) \cap L_{2,2}^{1,0}(\Omega \times [0, t_f])$.

Сформулируем окончательный результат.

Теорема 6. Пусть граница области $\Omega \in C^3$ и имеет ограниченные производные четвёртого порядка. $w_0 \in H_2^{0,2}(\Omega)$, $w_1 \in H_2^{0,1}(\Omega)$, $X(,0)$, $Y(,0) \in L_p(\Omega)$, $X, Y \in L_{p,1}^{0,1}(\Omega \times [0, t_f])$, $p > 1$, $Z \in L_2(\Omega \times [0, t_f])$. Тогда существуют слабые в смысле (6)–(8) решения начально-краевой задачи (1)–(5) с дифференциальными свойствами, описанными в теореме 5.

Литература

1. Hopf E. Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen // *Math. Nachrichten*. 1950–1951. № 4. P. 213–231.
2. Ворович И.И. О некоторых прямых методах в нелинейной теории колебаний пологих оболочек // *Изв. АН СССР. Математика*. 1957. Т. 21, № 6. С. 747–784.
3. Морозов Н.Ф. О нелинейных колебаниях тонких пластин с учётом инерции вращения // *Докл. АН СССР*. 1967. Т. 176, № 3. С. 523–525.
4. Власов В.З. Общая теория оболочек и её приложения в технике. М., 1949. 789 с.
5. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М., 1970. 288 с.

6. Gagliardo E. Ulteriori proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili // *Ricerche Mat.* 1959. № 8. P. 24–51.

7. Nirenberg L. On elliptic partial differential equations // *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*. 1959. Vol. 13, № 2. P. 115–162.

References

1. Hopf E. Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen. *Math. Nachrichten*, 1950/1951, no 4, pp. 213–231.
2. Vorovich I.I. O nekotorykh pryamykh metodakh v nelineinoi teorii kolebaniy pologikh obolochek [On some direct methods in the nonlinear theory of oscillations of shallow shells]. *Izvestiya AN SSSR. Matematika*, 1957, vol. 21, no 6, pp. 747–784.
3. Morozov N.F. O nelineinykh kolebaniyakh tonkikh plastin s uchetom inertsii vrashcheniya [On nonlinear oscillations of thin plates with the rotational inertia]. *Doklady AN SSSR*, 1967, vol. 176, no 3, pp. 523–525.
4. Vlasov V.Z. *Obshchaya teoriya obolochek i ee prilozheniya v tekhnike* [The general theory of shells and its application in engineering]. Moscow, 1949, 789 p.
5. Ladyzhenskaya O.A. *Matematicheskie voprosy dinamiki вязкой несжимаемой жидкости* [The mathematical theory of viscous incompressible fluid]. Moscow, 1970, 288 p.
6. Gagliardo E. Ulteriori proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili. *Ricerche Mat.*, 1959, no 8, pp. 24–52.
7. Nirenberg L. On elliptic partial differential equations. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, 1959, vol. 13, iss. 2, pp. 115–162.

УДК 519.1

ЗАДАЧА О МАКСИМАЛЬНОМ ПОТОКЕ В СЕТЯХ С ПОТЕРЯМИ В ВЕРШИНАХ

© 2015 г. В.А. Скорыходов, М.В. Шевелев

Скорыходов Владимир Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент, Институт математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов н/Д, 344090, e-mail: pdvaskor@yandex.ru

Skorokhodov Vladimir Aleksandrovich – Candidate of Physical and Mathematical Science, Associate Professor, Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences of the Southern Federal University, Milchakov St., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: pdvaskor@yandex.ru

Шевелев Максим Валерьевич – студент, Институт математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов н/Д, 344090, e-mail: maximka.shevelyov@yandex.ru

Shevelev Maksim Valer'evich – Student, Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences of the Southern Federal University, Milchakov St., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: maximka.shevelyov@yandex.ru

Рассмотрены сети, в которых для каждой вершины определена величина потери потока. Особенность таких сетей состоит в том, что в связи с потерями в некоторых вершинах величина потока, исходящего из стока, вообще говоря, не равна величине потока, входящего в сток. Для таких сетей рассмотрены два варианта задачи поиска максимального потока: при условии максимизации потерь и при условии их минимизации. Для каждого из предложенных вариантов разработаны алгоритмы их решения.

Ключевые слова: ориентированные сети, потоки в сетях, максимальный поток, потери потока, максимизация потерь, минимизация потерь.

We consider a network with some properties: each vertex has an additional characteristic - quantity flow losses. The peculiarity of such networks is that due to loss in some vertexes, the value of the flow is coming from the source can be not equal to the flow entering into the target. For such networks, the problem of maximizing of losses and the problem of minimizing of losses are considered. Algorithms of their decision are developed for each of the offered problems.

Keywords: oriented networks, flows in networks, maximal flow, losses of flow, maximizing of losses, minimizing of losses.

Настоящая работа посвящена исследованию задачи нахождения максимального потока в сетях с потерями потока. Сеть с потерями потока представляет собой ориентированную сеть, в вершинах которой может происходить потеря потока. Для таких сетей величина исходящего потока, вообще говоря, не равна величине входящего, поэтому находить максимальный поток, учитывая эту особенность, классическими методами не представляется возможным. Стоит отметить, что данная задача не является переформулировкой задачи нахождения потока в сетях с несколькими стоками, так как потери в вершинах задают приоритет насыщения дуг в сети, которого нет в задаче с несколькими стоками. Например, если мы не хотим много терять, то будем стараться насыщать сеть в обход вершин, где могут быть потери. Рассматриваемая модель возникает при моделировании некоторых процессов в сетях. Примером может быть сеть, по которой транспортируются какие-нибудь ресурсы, а в узлах такой сети происходят потери транспортируемых ресурсов.

Так как найти максимальный поток в сети с потерями классическими методами нельзя, то решение данной задачи будем искать в два этапа: сначала отразим потери на графе нужным образом, далее воспользуемся классическими алгоритмами нахождения максимального потока. Подобный подход используется для решений задач на нестандартную достижимость на графе. Задачи нахождения потоков в сетях с нестандартной достижимостью подробно рассматривались в работах [1–6]. Основной подход к решению таких задач – построение вспомогательного графа G' , который отражает особенности достижимости, и нахождение на нем максимального потока.

В настоящей работе рассмотрены две задачи нахождения максимального потока в сети с потерями: при условии максимизации и при условии минимизации потерь сети. В первой будем применять подход, согласно которому сначала построим вспомогательный граф G' , который будет отражать потери потока, а затем найдем классический максимальный поток одним из известных способов. Во второй задаче введем понятие стоимости дуг и, некоторым способом распределив стоимости, будем находить

максимальный поток минимальной стоимости. Стоит отметить, что задача максимизации потерь решается проще, чем задача минимизации потерь.

Сети с потерями потока в вершинах

Рассмотрим сеть $G(X, U, f)$ – связный ориентированный граф с двумя выделенными вершинами: источником s и стоком t . В классическом случае потоком в сети называется функция $F: U \rightarrow R_+$, обладающая свойствами ограниченности и неразрывности (см. [7]), т.е.

$$\begin{cases} \forall x \in X \quad \sum_{u \in [x]^-} F(u) = \sum_{u \in [x]^+} F(u); \\ \forall u \in U \quad 0 \leq F(u) \leq c(u). \end{cases}$$

Здесь и далее через $[x]^-$ будем обозначать множество дуг, входящих в вершину x , а $[x]^+$ – множество дуг, исходящих из вершины x .

Рассмотрим сеть $G(X, U, f)$, для каждой вершины x которой задана неотрицательная величина $\psi: X \rightarrow [0, +\infty)$ – максимально возможная потеря потока в этой. Всюду далее будем полагать, что $\psi(s) = \psi(t) = 0$, т.е. потери в источнике и стоке равны нулю. В такой сети будем рассматривать потоки с потерями в вершинах, т.е. функции $F: U \rightarrow R_+$ со следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \forall x \in X \quad \sum_{u \in [x]^-} F(u) &= \sum_{u \in [x]^+} F(u) + a(x), \\ \forall u \in U \quad 0 \leq F(u) &\leq c(u), \end{aligned} \quad (1)$$

где $a(x) = \min \left\{ \psi(x), \sum_{u \in [x]^+} F(u) \right\}$ – величина потери

потока в вершине x . Заметим, что $0 \leq a(x) \leq \psi(x)$.

Определение 1. Сеть $G(X, U, f)$, в которой рассматриваются потоки только с предложенными свойствами, будем называть сетью с потерями в вершинах.

Отметим, что в сети с потерями в вершинах $v_s(F)$ – величина потока F , исходящего из источника, – вообще говоря, не будет равна $v_t(F)$ – величине потока F , приходящего в сток.

Определение 2. Максимальным потоком в сети $G(X, U, f)$ с потерями в вершинах будем называть поток F , удовлетворяющий условию (1) и максимальный по величине $v_s(F)$.

Для удобства везде далее будем полагать, что множество вершин разбито на два подмножества: $X = X_l \cup X_o$, где $X_l = \{x \in X \mid \psi(x) > 0\}$, и $X_o = X \setminus X_l$.

Пример 1. Рассмотрим сеть G с потерями в вершинах (рис. 1). Возле каждой дуги указана величина пропускной способности. Считаем, что ка-

ждая закрашенная вершина принадлежит множеству X_o , а каждая незакрашенная – множеству X_l (величина $\psi(x)$ указана внутри вершин). У данной сети дуги $\{u_1, \dots, u_7\}$ и вершины обладают следующими свойствами: $f(u_1) = (s, x_1)$, $c(u_1) = 3$; $f(u_2) = (x_1, x_3)$, $c(u_2) = 3$; $f(u_3) = (x_1, x_2)$, $c(u_3) = 2$; $f(u_4) = (x_1, x_4)$, $c(u_4) = 1$; $f(u_5) = (x_2, x_4)$, $c(u_5) = 2$; $f(u_6) = (x_3, x_4)$, $c(u_6) = 3$; $f(u_7) = (x_4, t)$, $c(u_7) = 2$; $\psi(x_2) = 1$, $\psi(x_3) = 2$.

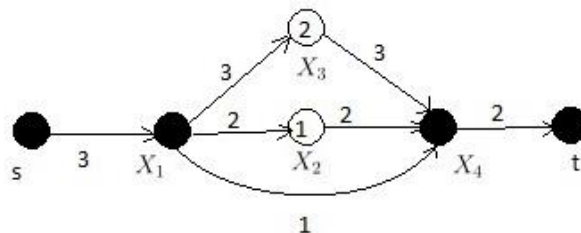


Рис. 1. Сеть G с потерями в вершинах

Задача о максимизации потерь в сети

Рассмотрим задачу нахождения потока максимальной величины в сети с потерями в вершинах, удовлетворяющего условию (1), для которого суммарная величина потери потока максимальна, т.е.

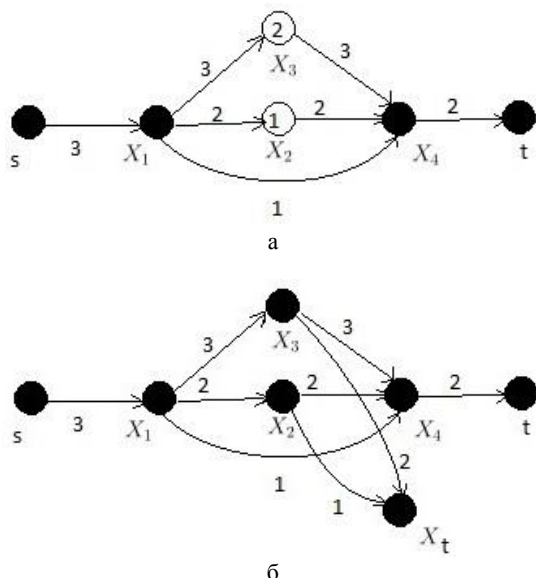
$$\sum_{x \in X_l} a(x) \rightarrow \max. \quad (2)$$

Поскольку максимальный поток с потерями в сети может быть не единственным, то решение поставленной задачи классическими методами представляется довольно затруднительным.

Поэтому для ее решения будем использовать вспомогательный граф $G'(X', U', f')$, на котором найдем поток, обеспечивающий выполнение условия (2) для исходного графа. Далее определенным образом перенесем найденный поток на исходный граф и продолжим нахождение максимального потока на G , являющегося решением задачи. Алгоритмы нахождения классического максимального потока описаны в работах [7, 8].

Вспомогательный граф G' будем строить по исходному графу G следующим образом: на исходном графе добавляем вершину x_l , которая будет новым стоком, затем для каждой вершины x , такой что $x \in X_l$, добавляем дугу u_x , такую что $f'(u_x) = (x, x_l)$. Пропускную способность каждой добавленной дуги u_x будем полагать равной величине $\psi(x)$.

Пример 2. Рассмотрим граф G на рис. 2а. Вспомогательный граф G' показан на рис. 2б.

Рис. 2. Исходный граф G (а) и вспомогательный граф G' (б)

Теорема 1. Решение задачи нахождения максимального потока при условии (2) может быть найдено при помощи следующего алгоритма.

Алгоритм 1. Шаг 1. Находим максимальный поток F' в сети G' из s в x_i .

Шаг 2. Полученный поток F' переносим на исходную сеть G следующим образом: $\forall u \in U \cup U' F''(u) := F'(u)$.

Шаг 3. Пока это возможно, продолжаем насыщение сети G потоком из s в t . Таким образом будет найден поток F , который является решением рассматриваемой задачи нахождения потока в исходной сети G с потерями в вершинах при условии минимизации потерь (2).

Доказательство. Условие (2) означает, что необходимо пропустить поток в первую очередь через вершины, в которых происходит потеря потока (т.е. $x \in X_l$). Таким образом, весь поток, который можно максимально потерять, будет потерян.

Рассмотрим результат выполнения шага 1. Для любой построенной дуги u_x графа G' возможны две ситуации:

1. Её пропускная способность равна величине потока (т.е. $c(u_x) = F'(u_x)$). Это означает, что через вершину x пропущен поток величины $\psi(x)$. Значит, поток F'' , найденный в процессе выполнения шага 2, насыщает граф G таким образом, что величина $a(x) = \psi(x)$ (т.е. фактическая потеря равна максимально возможной для вершины x).

2. Её пропускная способность больше величины потока ($c(u_x) > F'(u_x)$). Это означает, что через вершину x пропущен поток, меньший $\psi(x)$. Следова-

тельно, минимальный разрез графа G' не содержит дуги u_x . Поток F'' , найденный в процессе выполнения шага 2, насыщает граф G таким образом, что через данную вершину x невозможно пропустить никакого потока на этапе 3.

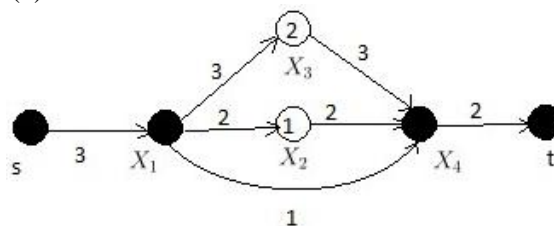
Таким образом, в результате выполнения шага 2 на исходном графе G получен поток с потерями, удовлетворяющий одновременно и условию (1), и условию (2). Однако этот поток вообще говоря не является максимальным.

Насыщение сети G потоком из вершины s в вершину t на шаге 3 для каждой вершины x не меняет величины $a(x)$. Это означает, что условия (1) и (2) для результирующего потока F выполнены и при этом поток F с потерями является максимальным.

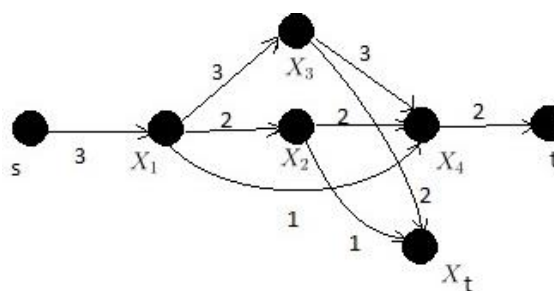
Теорема доказана.

Вычислительная трудоемкость алгоритма 1 определяется трудоемкостью нахождения максимального классического потока и в данном случае ограничена величиной $O(n^2 * m)$ [9], где $n = |X|$, $m = |U|$.

Пример 3. Рассмотрим сеть G с потерями потока в вершинах (рис. 3). Дуги $\{u_1, \dots, u_7\}$ и вершины обладают свойствами такими же, как и в примере (1).

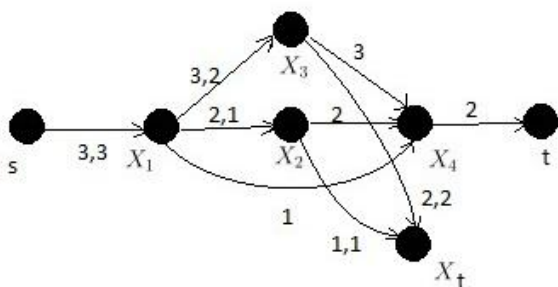
Рис. 3. Исходная сеть G

Построим вспомогательный граф G' (рис. 4).

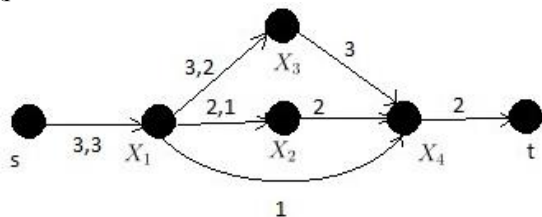
Рис. 4. Вспомогательная сеть G'

Выполним действия этапа 1. Полученный поток показан на рис. 5.

Заметим, что для вершин x_2 и x_3 $c(u_{x_2}) = F'(u_{x_2})$ и $c(u_{x_3}) = F'(u_{x_3})$. Это означает, что через эти вершины пропущен поток величины $\psi(x_2)$ и $\psi(x_3)$ соответственно, т.е. потери в данных вершинах являются максимально возможными.

Рис. 5. Поток в сети G' после выполнения этапа 1

Выполним действия этапа 2. Перенесем найденный на предыдущем этапе поток на исходный граф G (рис. 6).

Рис. 6. Поток в сети G после выполнения этапа 2

Выполним действия этапа 3. Найдем максимальный поток на графе G . Заметим, что поток, показанный на рис. 6, максимальной величины. Следовательно, окончательное решение задачи нахождения максимального потока в сети G с потерями в вершинах уже найдено.

Задача о минимизации потерь в сети

Рассмотрим задачу нахождения потока максимальной величины в сети с потерями, в вершинах удовлетворяющего условию (2), для которого суммарная величина потери потока минимальна, т.е.

$$\sum_{x \in X_I} a(x) \rightarrow \min. \quad (3)$$

Для поиска такого максимального потока F на графе G , что выполняется условие (3), будем применять алгоритм 2, основанный на алгоритме нахождения максимального потока минимальной стоимости [9]. Для этого с каждой дугой $u \in U$ свяжем величину $b(u)$ – стоимость прохождения по ней единицы потока.

Теорема 2. Решение задачи нахождения максимального потока при условии (3) может быть найдено при помощи следующего алгоритма.

Алгоритм 2. Шаг 1. На исходной сети G для любой вершины x , такой что $x \in X_I$, величину стоимости $b(u)$ для каждой дуги u , входящей в x , полагаем равной $b(u) = \min\{c(u), \psi(x)\}$. Для всех остальных дуг стоимость полагаем равной нулю.

Шаг 2. Выполняем одну итерацию алгоритма нахождения максимального потока минимальной стоимости при условии, что искомый поток на данной итерации будет единичной величины. В результате такой итерации получим увеличивающую цепь $\mu = \{u_1, \dots, u_k\}$. Для нее определим величину насыщения $e(\mu) = \min_{i=1, \dots, k} (c(u_i) - F(u_i))$.

Шаг 3. Если такой цепи не найдено, то делаем вывод, что поток F является максимальным и алгоритм заканчивает работу.

Шаг 4. Введем в рассмотрение величину a_μ – фактические потери потока при насыщении цепи μ . Положим $a_\mu = 0$ (так как насыщение по найденной цепи не происходило, а значит, потерь не было).

Шаг 5. Произведем насыщение сети G потоком по найденной цепи, причем делать это будем последовательно для каждой дуги этой цепи, начиная с первой.

Рассмотрим дугу $u_i = \mu(i) \quad \forall i \in [1; k]_N$. Если ее стоимость равна нулю ($b(u_i) = 0$), то выполняем насыщение следующим образом: $F(u_i) := F(u_i) + e(\mu) - a_\mu$, иначе выполняем следующую последовательность действий: $F(u_i) := F(u_i) + e(\mu) - a_\mu$,

$$a_\mu := a_\mu + \min(\psi(x), e(\mu) - a_\mu), \quad \psi(x) := \psi(x) - a_\mu.$$

Шаг 6. Возвращаемся к шагу 1.

Доказательство данной теоремы следует из обоснования алгоритма поиска максимального потока минимальной стоимости и доказательства теоремы 1.

Вычислительная трудоемкость алгоритма 2 определяется трудоемкостью нахождения максимального классического потока минимальной стоимости и в данном случае ограничена величиной $O(n^3 * m)$ (см. [9]), где $n = |X|$, $m = |U|$.

Пример 4. Рассмотрим сеть с потерями, приведенную на рис. 7, дуги и вершины которой обладают такими же свойствами, как и в примере (1).

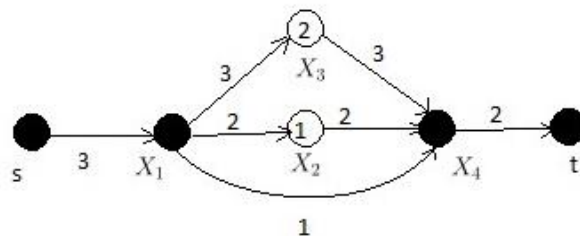


Рис. 7. Исходная сеть

На рассматриваемой сети для поиска максимального потока такого, что выполняется условие (3), применим алгоритм 2:

Итерация 1.

1.1. Стоимости дуг устанавливаются следующим образом: $b(u_1) = 0$, $b(u_2) = 2$, $b(u_3) = 1$, $b(u_4) = 0$, $b(u_5) = 0$, $b(u_6) = 0$, $b(u_7) = 0$.

1.2. В сети G находим увеличивающую цепь $\mu = \{u_1, u_4, u_8\}$ минимальной стоимости (в качестве последовательностей вершин: $\mu: s \rightarrow x_1 \rightarrow x_4 \rightarrow t$), при этом $e(\mu) = 1$.

1.3. Полагаем фактические потери равными нулю (т.е. $a_\mu := 0$).

1.4. Произведем насыщение сети G по цепи μ .

Рассмотрим первую дугу пути μ : $\mu(1) = u_1$. Поскольку $b(u_1) = 0$, выполняем насыщение $F(u_1) := F(u_1) + e(\mu) - a_\mu = 0 + 1 - 0 = 1$.

Рассмотрим вторую дугу пути μ : $\mu(2) = u_4$. Поскольку $b(u_4) = 0$, выполняем насыщение $F(u_4) := F(u_4) + e(\mu) - a_\mu = 0 + 1 - 0 = 1$.

Рассмотрим третью дугу пути μ : $\mu(3) = u_7$. Поскольку $b(u_7) = 0$, выполняем насыщение $F(u_7) := F(u_7) + e(\mu) - a_\mu = 0 + 1 - 0 = 1$.

Итерация 2.

2.1. Поскольку на предыдущей итерации ни одна из величин $\psi(x)$ не изменилась, то величины $b(u)$ остались прежними.

2.2. В сети G находим увеличивающую цепь $\mu = \{u_1, u_3, u_5, u_7\}$ минимальной стоимости (в качестве последовательностей вершин: $\mu: s \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_4 \rightarrow t$), при этом $e(\mu) = 2$.

2.3. Полагаем фактические потери равными нулю (т.е. $a_\mu := 0$).

2.4. Произведем насыщение сети G по цепи μ .

Рассмотрим первую дугу пути μ : $\mu(1) = u_1$. Поскольку $b(u_1) = 0$, выполняем насыщение $F(u_1) := F(u_1) + e(\mu) - a_\mu = 1 + 2 - 0 = 3$.

Рассмотрим вторую дугу пути μ : $\mu(2) = u_3$. Поскольку $b(u_3) \neq 0$, выполняем следующие действия:

$$F(u_3) := F(u_3) + e(\mu) - a_\mu = 0 + 2 - 0 = 2,$$

$$a_\mu := a_\mu + \min\{1, 2\} = 0 + 1 = 1,$$

$$\psi(x_2) := \psi(x_2) - a_\mu = 1 - 1 = 0.$$

Рассмотрим третью дугу пути μ : $\mu(3) = u_5$. Поскольку $b(u_5) = 0$, выполняем насыщение $F(u_5) := F(u_5) + e(\mu) - a_\mu = 0 + 2 - 1 = 1$.

Рассмотрим четвертую дугу пути μ : $\mu(4) = u_7$. Поскольку $b(u_7) = 0$, выполняем насыщение $F(u_7) := F(u_7) + e(\mu) - a_\mu = 1 + 2 - 1 = 2$.

Итерация 3.

3.1. Произведем пересчет стоимости дуг следующим образом: $b(u_3) = 0$, остальные стоимости не изменились.

Поскольку на полученном графе G невозможно построить ни одну увеличивающую цепь μ , алгоритм 2 заканчивает работу. Полученный поток представлен на рис. 8.

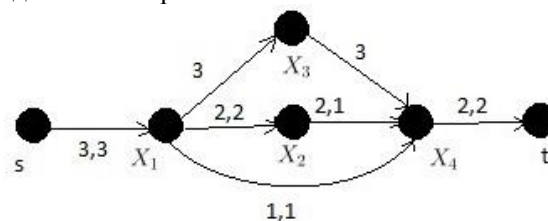


Рис. 8. Найденный поток

Замечание 1. Если в описании алгоритма 2 на шаге 2 пропускную способность насыщающей цепи μ вычислять по формуле

$$c(\mu) = \min_{i=1, \dots, |\mu|} \left\{ \min \left\{ c(u_i) - F(u_i), \sum_{j=1}^i \psi((p_2 \circ f)(u_j)) \right\} \right\}, \quad (4)$$

то количество итераций при применении алгоритма сократится.

Это произойдет по той причине, что цепь μ , пропускная способность которой вычислена по формуле (4), будет полностью насыщена, тогда как при строгом применении алгоритма насыщение некоторых цепей разбивается на два этапа: насыщение с потерями и насыщение без потерь. Данная ситуация представлена в примере 4 – итерации 2 и 3, а также итерации 4 и 5.

Авторы выражают благодарность своему учителю Я.М. Ерусалимскому за поддержку и постоянное внимание к их научной работе.

Литература

1. Ерусалимский Я.М., Логвинов С.Ю. Некоторые задачи достижимости на графах с ограничениями // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 1996. № 2. С. 14 – 17.
2. Ерусалимский Я.М., Скороходов В.А. Потoki в сетях со связанными дугами // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. Приложение. 2003. № 8. С. 3–8.
3. Ерусалимский Я.М., Водолазов Н.Н. Нестационарный поток в сети // Вестн. ДГТУ. 2009. Т. 9, № 3(42). С. 402 – 409.

4. Скороходов В.А., Ерусалимский Я.М. Нестандартная достижимость на графах: модели и алгоритмы. Saarbrücken, Germany. 2011. 188 p.

5. Скороходов В.А. Потoki в обобщенных сетях со связанными дугами // Моделирование и анализ информационных систем. 2012. Т. 19, № 2. С. 4–52.

6. Скороходов В.А. Задача о перераспределении ресурсов на графах с нестандартной достижимостью // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2010. № 1. С. 22–26.

7. Ерусалимский Я.М. Дискретная математика: теория, задачи, приложения. М., 2001. 279 с.

8. Водолазов Н.Н., Ерусалимский Я.М. Максимальный всплеск в сети и максимальный объем сети // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2010. № 6. С. 9–13.

9. Басакер Р., Саати Т.Л. Конечные графы и сети. М., 1974. 368 с.

References

1. Erusalimskii Ya.M., Logvinov S.Yu. Nekotorye zadachi dostizhimosti na grafakh s ogranicheniyami [Some problems reachability graph with restrictions]. *Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskii region. Estestvennye nauki*, 1996, no 2, pp. 14-17.

2. Erusalimskii Ya.M., Skorokhodov V.A. Potoki v setyakh so svyazannymi dugami [Flows in networks with

related arcs]. *Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskii region. Estestvennye nauki. Prilozhenie*, 2003, no 8, pp. 3-8.

3. Erusalimskii Ya.M., Vodolazov N.N. Nestatsionarnyi potok v seti [Unsteady flow in the network]. *Vestnik DGTU*, 2009, vol. 9, no 3(42), pp. 402-409.

4. Skorokhodov V.A., Erusalimskii Ya.M. *Nestandardnaya dostizhimost' na grafakh: modeli i algoritmy* [Custom reachability graph: models and algorithms]. Saarbrücken, Germany, 2011, 188 p.

5. Skorokhodov V.A. Potoki v obobshchennykh setyakh so svyazannymi dugami [Flows in generalized nets with related arcs]. *Modelirovanie i analiz informatsionnykh sistem*, 2012, vol. 19, no 2, pp. 41-52.

6. Skorokhodov V.A. Zadacha o pereraspredelenii resursov na grafakh s nestandardnoi dostizhimost'yu [The problem of the redistribution of resources on graphs with non-standard attainable]. *Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskii region. Estestvennye nauki*, 2010, no 1, pp. 22-26.

7. Erusalimskii Ya.M. *Diskretnaya matematika: teoriya, zadachi, prilozheniya* [Discrete mathematics: the theory, tasks application]. Moscow, 2001, 279 p.

8. Vodolazov N.N., Erusalimskii Ya.M. Maksimal'nyi vsplek v seti i maksimal'nyi ob'em seti [The burst in the network and the maximum network]. *Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskii region. Estestvennye nauki*, 2010, no 6, pp. 9-13.

9. Basaker R., Saati T. *Konechnye grafy i seti* [Finite graphs and networks]. Moscow, 1974, 368 p.

УДК 517.956

КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ, ИМЕЮЩИХ ПОЧТИ ГАУССОВСКУЮ СТЕПЕНЬ ТОЧНОСТИ

© 2015 г. Ш.С. Хубежты, А.О. Цуцаев

Хубежты Шалва Соломонович – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра математического анализа, Северо-Осетинский государственный университет, ул. Ватутина, 46, г. Владикавказ, 362025; ведущий научный сотрудник, Южный математический институт ВНЦ РАН и Правительства Республики Северная Осетия – Алания, ул. Маркуса, 22, г. Владикавказ, 362027, e-mail: shalva57@rambler.ru

Khubezhty Shalva Solomonovich – Doctor of Physical and Mathematical Science, Professor, Department of Mathematical Analysis, North Ossetian State University, Vatutin St., 46, Vladikavkaz, 362025, Russia; Leading Researcher, Southern Mathematics Institute of VSC RAS and the Government of the Republic of North Ossetia-Alania, Marcus St., 22, Vladikavkaz, 362027, Russia, e-mail: shalva57@rambler.ru

Цуцаев Арсен Олегович – аспирант, Южный математический институт ВНЦ РАН и Правительства Республики Северная Осетия-Алания, ул. Маркуса, 22, г. Владикавказ, 362027, e-mail: tsutsaev@yandex.ru

Tsutsaev Arsen Olegovich – Post-Graduate Student, Southern Mathematics Institute of VSC RAS and the Government of the Republic of North Ossetia-Alania, Marcus St., 22, Vladikavkaz, 362027, Russia, e-mail: tsutsaev@yandex.ru

Построены квадратурные формулы для сингулярных интегралов с ядром типа Коши, близкие по точности к гауссовским. Алгебраическая степень точности равна $2n$. Но она характерна тем, что в процессе увеличения n при переходе от данного $n=n_1$ к последующему $n=n_1+1$ требуется переычисление значений функции $\phi(t)$, но не во всех узлах квадратуры, а только в их части. Кроме этого, если обычные квадратурные формулы для сингулярных интегралов имели наивысшую степень точности только тогда, когда параметр сингулярности являлся корнем присоединенной функции Лежандра второго рода, то для построенных квадратурных формул существует более широкое множество значений параметра сингулярности. Такими множествами являются корни многочленов Чебышева первого и второго рода.

Ключевые слова: сингулярный интеграл с ядром Коши, квадратурная формула, чебышевский вес, гауссовская точность.

Quadrature formulas for singular integrals with the Cauchy kernel, similar in accuracy to the Gaussian ones, were constructed. The algebraic degree of accuracy is $2n$. But it is characterized by the fact that in the process of n increase in the transition from the present $n=n_1$ to the next $n=n_1+1$ it is necessary to re-calculate the value of function $\phi(t)$, however, not in all nodes of the quadrature but only in part of them. In addition, if the usual quadrature formulas for singular integrals have the highest degree of accuracy, it is only when the singularity parameter was the root of the associated Legendre function of the second kind, the wider range of singularity parameter values exists for the constructed quadrature formulas. These sets are the roots of the Chebyshev polynomials of the first and second kinds.

Keywords: singular integral with Cauchy kernel, quadrature formula, Chebyshev weight, Gauss accuracy.

Общая постановка задачи и её актуальность

В существующей ныне литературе, относящейся к вопросу теории квадратурных формул для сингулярных интегралов с ядром Коши, значительный интерес представляют квадратурные формулы Гаусса для таких интегралов (см., напр., [1, 2]). В соответствующих работах этого направления показывается, что достижение гауссовской степени точности в случае сингулярных интегралов вида

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \rho(t) \frac{\phi(t)}{t-x} dt \quad (-1 < x < 1), \quad (1)$$

где $\rho(t)$ – заданная на $[-1, +1]$ конкретная суммируемая (обычно знакопостоянная) функция; $\phi(t)$ – произвольная функция из некоторого класса гладких функций, возможно при определенном выборе значений параметра сингулярности x . А именно в

общем случае предполагается, что значениями x являются нули так называемых присоединенных функций, или функций второго рода (см., напр., [3]). К часто встречающимся в приложениях сингулярным интегралам вида (1) обычно относятся интегралы с весовыми функциями $(1-t)^p(1+t)^q$ ($p, q > -1$) (см., напр., [2, 4 – 6]). Как подтверждается упомянутыми и рядом других работ, сингулярные интегралы с такими весовыми функциями имеют применение в контактных задачах теории упругости, в том числе в теории трещин.

К наиболее приемлемому подходу к вычислению (приближенно) интегралов

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} (1-t)^p (1+t)^q \frac{\phi(t)}{t-x} dt \quad (-1 < x < 1) \quad (2)$$

при произвольных значениях x из рассматриваемого

мого интервала следует отнести применение к (2) квадратурных формул для сингулярных интегралов, основанных на аппроксимации функции $\phi(t)$ ее интерполяционными полиномами, построенных по корням ортогональных на отрезке $[-1, +1]$ по весу $(1-t)^p(1+t)^q$ полиномов. К основным вопросам в направлении исследования и приложения построенных на такой основе квадратурных формул относятся такие вопросы, как оценка их погрешности на различных классах функций $\phi(t)$, сходимость на возможно широких классах плотностей $\phi(t)$, влияние ряда локальных свойств последних на поведение их остаточных членов, а также влияние вычислительных погрешностей (округления, наследственных) и т.п. Отметим также, что при конструировании на такой основе квадратурных формул определенного внимания требует вычисление независимых от ϕ стандартных интегралов

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{(1-t)^p(1+t)^q}{t-x} dt \quad (p, q > -1), \text{ точное вычисление}$$

которых для ряда значений p, q возможно методами теории функций комплексного переменного (см. также [7]). В общем случае эти интегралы могут быть вычислены приближенно с любой заданной степенью точности. Тем самым в случае заданных точно (или с большой точностью) исходных данных (плотностей сингулярных интегралов) можно, по-видимому, утверждать определенную вычислительную эффективность известных ныне многих квадратурных формул. Тем не менее следует упомянуть о связанных с практическими приложениями задачах с приближенными исходными данными (например, когда эти данные определяются на основе эксперимента). Так, к примеру, может обостряться дело при численном решении определенных классов сингулярных интегральных уравнений, относящихся к некоторым задачам физики (см., напр., [8]), когда значения ядра рассматриваемого интегрального уравнения определяются путем эксперимента с последующим сравнением результатов вычислений на различных шагах. При возникновении такого рода ситуаций наиболее эффективным представляется применение к аппроксимации сингулярных интегралов квадратурных формул такой структуры, чтобы в возможно нужном процессе последовательного увеличения числа узлов квадратуры найденное на данном шаге значение ядра уравнения могло быть использовано вторично при последующем значении числа узлов. С этой целью представляется полезным рассмотрение квадратурных формул для сингулярных интегралов, построение которых будет основано на применении в качестве интерполяционных узлов совокупности нулей

двух ортогональных по данному весу $(1-t)^p(1+t)^q$ полиномов последовательных степеней (n и $n+1$). Очевидно, что такие квадратурные формулы могут быть построены теми же способами, что и упомянутые выше, и имеют алгебраическую степень точности $2n$.

В [9] изучен случай $p = q = -\frac{1}{2}$ и построены квадратурные формулы

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\phi(t) dt}{\sqrt{1-t^2}(t-x)} \approx \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{U_{n-1}(x) T_{n+1}(x)}{x - x_{k,n+1}} \phi(x_{k,n+1}) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{T_n(x) U_n(x)}{x - x_{k,n}} \phi(x_{k,n}), \text{ где}$$

$$U_n(x) = \frac{\sin(n+1) \arccos x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad T_n(x) = \cos n \arccos x -$$

ортогональные многочлены Чебышева.

В настоящей заметке мы будем рассматривать случаи $p = q = \frac{1}{2}$, т.е. интеграл вида

$$S(\phi; x) \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\phi(t)}{\sqrt{1-t^2}(t-x)} dt. \quad (3)$$

Согласно сказанному выше, построение интересующей нас в данном случае квадратурной формулы для интеграла (3) основывается на аппроксимации функции $\phi(t)$ интерполяционным многочленом, построенным по значениям $\phi(t)$ в узлах, представляющих нули многочлена $U_n(t)U_{n+1}(t)$, где $U_n(t)$ и $U_{n+1}(t)$ — чебышевские многочлены второго рода степени $n, n+1$.

Построение квадратурной формулы по узлам нулей полинома $U_n(t)U_{n+1}(t)$

С целью построения оговоренного выше интерполяционного полинома обозначим через $\{x_{kn}\}_{k=1}^n$ и $\{x_{k,n+1}\}_{k=1}^{n+1}$ нули полиномов $U_n(t)$, $U_{n+1}(t)$ соответственно. В первую очередь нам нужно найти детальное выражение значений $[U_n(t)U_{n+1}(t)]'_{t=x_{kn}}$, $[U_n(t)U_{n+1}(t)]'_{t=x_{k,n+1}}$.

Имеем

$$[U_n(t)U_{n+1}(t)]'_{t=x_{kn}} = U'_n(x_{kn})U_{n+1}(x_{kn}),$$

$$[U_n(t)U_{n+1}(t)]'_{t=x_{k,n+1}} = U_n(x_{k,n+1})U'_{n+1}(x_{k,n+1}). \quad (4)$$

Используя далее представления

$$U_n(t) = \frac{\sin(n+1) \arccos t}{\sqrt{1-t^2}} \quad \text{и} \quad x_{kn} = \cos \frac{k\pi}{n+1}, \text{ можно на}$$

основе (4) убедиться в справедливости равенств

$$[U_n(t)U_{n+1}(t)]'_{t=x_{kn}} = -\frac{n+1}{\sin^2 \frac{k\pi}{n+1}},$$

$$[U_n(t)U_{n+1}(t)]'_{t=x_{kn+1}} = \frac{n+2}{\sin^2 \frac{k\pi}{n+2}}.$$

Применяя указанные соотношения, для искомого интерполяционного многочлена $L_{2n}(\phi; t)$ получим представление

$$L_{2n}(\phi; t) = U_n(t)U_{n+1}(t) \times \left\{ -\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{\sin^2 \frac{k\pi}{n+1}}{t-x_{kn}} \phi(x_{kn}) + \frac{1}{n+2} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\sin^2 \frac{k\pi}{n+2}}{t-x_{kn+1}} \phi(x_{kn+1}) \right\}. \quad (5)$$

Подставляя (5) в (3) вместо $\phi(t)$, получаем приближенную формулу

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{\phi(t)}{t-x} dt \approx$$

$$\approx -\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \sin^2 \frac{k\pi}{n+1} \phi(x_{kn}) \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{U_n(t)U_{n+1}(t)}{(t-x)(t-x_{kn})} dt +$$

$$+ \frac{1}{n+2} \sum_{k=1}^{n+1} \sin^2 \frac{k\pi}{n+2} \phi(x_{kn+1}) \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{U_n(t)U_{n+1}(t)}{(t-x)(t-x_{kn+1})} dt.$$

Следовательно, построение указанной квадратурной формулы сводится к вычислению интегралов вида

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{U_n(t)U_{n+1}(t)}{(t-x)(t-x_{kn})} dt, \quad \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{U_n(t)U_{n+1}(t)}{(t-x)(t-x_{kn+1})} dt. \quad (6)$$

Это может быть осуществлено с учетом ортогональности системы полиномов $\{U_n(t)\}$ по весу $\sqrt{1-t^2}$ применением ряда формул, относящихся к взаимосвязи этих полиномов с полиномами Чебышева первого рода $\{T_n(t)\}$. В частности, очевидно, что определение первого из этих интегралов может быть основано на вычислении двух интегралов

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{U_n(t)U_{n+1}(t)}{t-x} dt,$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{U_n(t)U_{n+1}(t)}{t-x_{kn}} dt, \quad (7)$$

причем второй интеграл в (7) заведомо равен нулю в силу ортогональности на $[-1, 1]$ системы полиномов $\{U_n(t)\}$ по весу $\sqrt{1-t^2}$. Преобразуем первый

$$\text{интеграл в (7) к виду } \frac{U_n(x)}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2} U_{n+1}(t)}{t-x} dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{U_{n+1}(t)[U_n(t)-U_n(x)]}{t-x} dt$$

и воспользуемся упомянутым выше свойством ортогональности. Получим, что второе слагаемое

равняется нулю, а первое вычисляется по известной в теории ортогональных многочленов [3] формуле $\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2} U_{n+1}(t)}{t-x} dt = -T_{n+2}(x)$, где $T_{n+2}(x)$ – многочлен Чебышева первого рода степени $n+2$.

Аналогично поступаем с интегралами, содержащими множители вида $(t-x_{kn+1})^{-1}$ (вторые интегралы из (6))

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{U_n(t)U_{n+1}(t)}{(t-x)(t-x_{kn+1})} dt =$$

$$= \frac{1}{x-x_{kn+1}} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{U_n(t)U_{n+1}(t)}{t-x} dt - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{U_n(t)U_{n+1}(t)}{t-x_{kn+1}} dt \right\}.$$

Согласно замеченному выше, рассмотрению подлежит второй интеграл в правой части. Преобразуем его

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{U_n(t)U_{n+1}(t)}{t-x_{kn+1}} dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} U_n(t) \frac{U_{n+1}(t)-U_{n+1}(x_{kn+1})}{t-x_{kn+1}} dt.$$

Используя квадратурную формулу Гаусса (см. [5, 6]), получаем $\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{U_n(t)U_{n+1}(t)}{t-x_{kn+1}} dt =$

$$= \frac{1}{n+2} \sum_{j=1}^{n+1} \sin^2 \frac{j\pi}{n+2} U_n(x_{jn+1}) \left(\frac{U_{n+1}(t)-U_{n+1}(x_{kn+1})}{t-x_{kn+1}} \right) \Big|_{t=x_{jn+1}} =$$

$$= \frac{1}{n+2} \sin^2 \frac{k\pi}{n+2} U_n(x_{kn+1}) U'_{n+1}(x_{kn+1}) =$$

$$= \frac{1}{n+2} \sin^2 \frac{k\pi}{n+2} (-1)^{k-1} \frac{(-1)^{k-1} (n+2)}{\sin^2 \frac{k\pi}{n+2}} = 1.$$

В результате окончательно приходим к квадратурной формуле вида $\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{\phi(t)}{t-x} dt \approx$

$$\approx \frac{1}{n+2} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\sin^2 \frac{k\pi}{n+2} \phi(x_{kn+1})}{x-x_{kn+1}} \{-U_n(x)T_{n+2}(x)-1\} -$$

$$- \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{\sin^2 \frac{k\pi}{n+1} \phi(x_{kn})}{x-x_{kn}} (-U_n(x)T_{n+2}(x)) \equiv S_n(\phi; x).$$

$$\text{Но } U_n(x)T_{n+2}(x)+1 = \frac{\sin(n+1)\vartheta \cos(n+2)\vartheta}{\sin \vartheta} + 1 =$$

$$= \frac{1/2(\sin(2n+3)\vartheta - \sin \vartheta) + \sin \vartheta}{\sin \vartheta} =$$

$$= \frac{1/2(\sin(2n+3)\vartheta + \sin \vartheta)}{\sin \vartheta} =$$

$$= \frac{\sin(n+2)\vartheta \cos(n+1)\vartheta}{\sin \vartheta} = U_{n+1}(x)T_{n+1}(x),$$

где $x = \cos \vartheta$.

Поэтому итоговая формула

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{\phi(t)}{t-x} dt &\approx \\ &\approx \frac{U_n(x)T_{n+2}(x)}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{\sin^2 \frac{k\pi}{n+2}}{x-x_{kn}} \phi(x_{kn}) - \\ &- \frac{U_{n+1}(x)T_{n+1}(x)}{n+2} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\sin^2 \frac{k\pi}{n+2}}{x-x_{kn+1}} \phi(x_{kn+1}) \equiv S_n(\phi; x). \end{aligned} \quad (8)$$

Формула (8) обладает упомянутым выше вычислительным свойством, выражающимся в ее эффективности при переходе от данного значения n к последующему. Однако естественный интерес представляет вопрос о достижимости возможно более высокой степени точности формулы с возможно меньшим числом узлов. Это заведомо связано с задачей надлежащего выбора в (8) значений параметра сингулярности x из данного интервала.

Оценка погрешности дается теоремой.

Теорема. Если плотность $\phi(t)$ имеет непрерывные производные до $r-1$ -го ($r \geq 1$) порядка, а $\phi^{(r)}$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем α ($0 < \alpha < 1$), тогда имеет место неравенство

$$|S(\phi; x) - S_n(\phi; x)| \leq O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}\right). \quad (9)$$

Для доказательства разделим отрезок $[-1, 1]$

на n частей точками $x_\sigma = -1 + \sigma h$, $h = \frac{2}{n}$, $\sigma = 0, 1, \dots, n$, и пусть $\phi(t) \in H_r(\alpha)$. Разложим $\phi(t)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_σ ,

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \phi(x_\sigma) + \frac{\phi'(x_\sigma)}{1!}(t-x_\sigma) + \frac{\phi''(x_\sigma)}{2!}(t-x_\sigma)^2 + \dots \\ &+ \frac{\phi^{(r)}(x_\sigma)}{r!}(t-x_\sigma)^r + \frac{1}{(r-1)!} \int_{x_\sigma}^t (t-u)^{r-1} (\phi^{(r)}(u) - \phi^{(r)}(x_\sigma)) du \\ &(1 \leq r \leq 2n). \end{aligned}$$

Учитывая, что квадратурная формула (8) точна для всех многочленов степени $\leq 2n$, для остатка квадратурной формулы получим

$$\begin{aligned} |S(\phi; x) - S_n(\phi; x)| &= \\ &= \left| \sum_{\sigma=0}^{n-1} \frac{1}{\pi} \int_{x_\sigma}^{x_{\sigma+1}} \frac{\sqrt{1-t^2}}{t-x} \frac{1}{(r-1)!} dt \int_{x_\sigma}^t (t-u)^{r-1} (\phi^{(r)}(u) - \phi^{(r)}(x_\sigma)) du \right|. \end{aligned}$$

Используя условие Гельдера

$$|\phi^{(r)}(u) - \phi^{(r)}(x_\sigma)| \leq A|u - x_\sigma|^\alpha \leq Ah^\alpha, \quad \text{после несложных преобразований получим оценку (9).}$$

О квадратурных формулах, близких по точности к гауссовским для сингулярных интегралов

Как было указано, построение квадратурной формулы вида (8) было осуществлено по определенному процессу аппроксимации плотности $\phi(t)$, при котором возможно заведомое утверждение точности полученной данным способом квадратурной формулы для любого многочлена степени $\leq 2n$ при значениях $x \in (-1, 1)$. При этом можно распорядиться о таком выборе значений параметра x в указанных пределах, чтобы соответствующая квадратурная сумма содержала бы по возможности меньшее количество слагаемых (т.е. значений плотности $\phi(t)$ в узлах). Как известно, таковыми являются прежде всего уже известные квадратурные формулы Гаусса. Однако, как уже было оговорено, максимальное число значений параметра x и тем самым соответствующих им формул, при которых достижение такой степени точности осуществимо, в известном смысле невелико (в основном на единицу меньше числа узлов самой квадратурной формулы). С этой точки зрения может быть естественным вопрос о возможности построения другого вида квадратурных формул с такой же алгебраической точностью по возможности с наименьшим при этом (однако заведомо большим, чем в гауссовых формулах) числом ординат. Некоторые такие формулы (как и сами известные формулы Гаусса) могут быть получены, как определенные частные случаи общей формулы (8) надлежащим выбором значений x в этой формуле. Ниже приводятся некоторые такие формулы.

1. Подчиним параметр x условию $T_{n+2}(x) = 0$, т.е. значения x представляют нули многочлена Чебышева первого рода $\{x_{vn+2}^{(0)}\}_{v=1}^{n+2}$. В данном случае вторая сумма в (8) обращается в нуль, т.е. мы будем иметь квадратурную формулу вида

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{\phi(t)}{t-x_{vn+2}^{(0)}} dt \approx \frac{1}{n+2} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\sin^2 \frac{k\pi}{n+2}}{x_{kn+1} - x_{vn+2}^{(0)}} \phi(x_{kn+1}),$$

($v = 1, 2, \dots, n+2$), что представляет известную в литературе квадратурную формулу Гаусса [6] с числом узлов $n+1$.

2. Будем считать, что значениями параметра x являются нули многочлена $U_n(x)$. Тогда первая сумма в (8) отличается от соответствующей в предыдущем случае тем, что вместо чисел $\{x_{vn+2}^{(0)}\}$ будут присутствовать нули многочлена $U_n(x)$, которые обозначим через $\{x_{vn}^{(1)}\}$. Во второй сумме, если считать, что v_0 — одно из значений v ($v = \overline{1, n}$), все

отличные от содержащих в себе узел $x_{v_0n}^{(1)}$ ее слагаемые исчезают, и в результате мы приходим к квадратурной формуле вида

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{\phi(t)}{t-x_{v_0n}^{(0)}} dt \approx \frac{1}{n+2} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\sin^2 \frac{k\pi}{n+2}}{x_{kn+1}^{(1)} - x_{v_0n}^{(1)}} \phi(x_{kn+1}^{(1)}) - \frac{1}{n+1} \sin^2 \frac{v_0\pi}{n+1} U'_n(x_{v_0n}^{(1)}) T_{n+2}(x_{v_0n}^{(1)}) \phi(x_{v_0n}^{(1)}). \quad (10)$$

Она, как и предыдущая формула, имеет гауссовскую алгебраическую точность и отличается от известной гауссовской квадратурной формулы (для сингулярных интегралов) лишь присутствием последнего слагаемого в квадратурной сумме (10).

3. Рассмотрим случай определения параметра x согласно условию $U_{n+1}(x)T_{n+1}(x)=0$ (или $U_n(x)T_{n+2}(x)+1=0$). Можно взять $x=x_{vn+1}^{(1)}$, т.е. корень уравнения $T_{n+1}(x)=0$. Тогда получается следующая квадратурная формула:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{\phi(t)}{t-x_{vn+1}^{(1)}} dt \approx \frac{U_n(x_{vn+1}^{(1)})T_{n+2}(x_{vn+1}^{(1)})}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{\sin^2 \frac{k\pi}{n+1}}{x_{kn}^{(1)} - x_{vn+1}^{(1)}} \phi(x_{kn}^{(1)}).$$

4. Если взять $x=x_{vn+1}^{(0)}$, т.е. корень уравнения $U_{n+1}(x)=0$, то квадратурная формула будет иметь более сложный вид, а именно

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{\phi(t)}{t-x_{vn+1}^{(0)}} dt \approx \frac{U_n(x_{vn+1}^{(0)})T_{n+2}(x_{vn+1}^{(0)})}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{\sin^2 \frac{k\pi}{n+1}}{x_{kn}^{(0)} - x_{vn+1}^{(0)}} \phi(x_{kn}^{(0)}) - \frac{1}{n+2} U'_{n+1}(x_{vn+1}^{(0)}) T_{n+1}(x_{vn+1}^{(0)}) \phi(x_{vn+1}^{(0)}).$$

Литература

1. Корнейчук А.А. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов // Вычислительная математика и математическая физика. М., 1962. С. 64–74.
2. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев, 1976. 442 с.
3. Сегё Г. Ортогональные полиномы. М., 1962. 500 с.
4. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М., 1962. 599 с.

5. Хубежты Ш.С. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов и некоторое их применение. Владикавказ, 2011. 236 с.

6. Вайникко Г.М., Лифанов И.К., Полтавский Л.Н. Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения. М., 2001. 508 с.

7. Бойков И.В. Приближенные методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Пенза, 2009. 252 с.

8. Brown J.E., Jackson E. Nucleon-nucleon interaction. М., 1979. 248 p.

9. Саникидзе Д.Г., Купатадзе К.Р., Хубежты Ш.С. О квадратурных формулах для сингулярных интегралов с ядром Коши, имеющих близкую к гауссовской степени точности // Вісник Харківського національного університету. 2013. № 1063. С. 90–98.

References

1. Korneichuk A.A. Kvadrurnye formuly dlya singulyarnykh integralov [Quadrature formulas for singular integrals]. Vychislitel'naya matematika i matematicheskaya fizika. Moscow, 1962, pp 64-74.
2. Panasyuk V.V., Savruk M.P., Datsyshin A.P. Rasprezhenie napryazhenii okolo treshchin v plastinakh i obolochkakh [Stress distribution near the cracks in plates and shells]. Kiev, 1976, 442 p.
3. Sege G. Ortogonal'nye polinomy [Orthogonal polynomials]. Moscow, 1962, 500 p.
4. Muskhelishvili N.I. Singulyarnye integral'nye uravneniya [Singular integral equations]. Moscow, 1962, 599 p.
5. Khubezhty Sh.S. Kvadrurnye formuly dlya singulyarnykh integralov i nekotoree ikh primeneniye [Quadrature formulas for singular integrals and some of their applications]. Vladikavkaz, 2011, 236 p.
6. Vainikko G.M., Lifanov I.K., Poltavskii L.N. Chislennyye metody v gipersingulyarnykh integral'nykh uravneniyakh i ikh prilozheniya [Numerical methods in hypersingular integral equations and their applications]. Moscow, 2001, 508 p.
7. Boikov I.V. Priblizhennyye metody vychisleniya singulyarnykh i gipersingulyarnykh integralov [Approximate methods of calculation of singular and hypersingular integrals]. Penza, 2009, 252 p.
8. Brown J.E., Jackson E. Nucleon-nucleon interaction. Moscow, 1979, 248 p.
9. Sanikidze D.G., Kupatadze K.R., Khubezhty Sh.S. O kvadrurnykh formulakh dlya singulyarnykh integralov s yadrom Koshi, imeyushchikh blizkuyu k gaussovs-koi stepen' tochnosti [Quadrature formulas for singular integrals with Cauchy kernel, with close to a Gaussian degree of accuracy]. Visnik Kharkivs'kogo natsional'nogo universitetu, 2013, no 1063, pp. 90-98.

УДК 512.643.8

УЛУЧШЕНИЕ ОЦЕНКИ МАКСИМУМ НОРМЫ ОБРАТНЫХ БЛОЧНЫХ МАТРИЦ НЕКРАСОВА*

© 2015 г. Л. Цветкович, К. Дорословачки, Б.Л. Крукиер, Л.А. Крукиер

Цветкович Лилиане – PhD, профессор, факультет естественных наук, кафедра математики и информатики, Университет Нови Сад, г. Нови Сад, Сербия, e-mail: lila@dm.uns.ac.rs

Cvetkovich Ljiljana – PhD, Professor, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science, University of Novi Sad, Serbia, e-mail: lila@dm.uns.ac.rs

Дорословачки Ксения – PhD, факультет технических наук, университет Нови Сад, г. Нови Сад, Сербия, e-mail: ksenia4787@yahoo.com

Doroslovački Ksenija – PhD, Faculty of Technical Science, University of Novi Sad, Serbia, e-mail: ksenia4787@yahoo.com

Крукиер Борис Львович – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра высокопроизводительных вычислений и информационно-коммуникационных технологий, Институт математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов н/Д, 344090, e-mail: bk@srfedu.ru

Krukier Boris L'vovich – Candidate of Physical and Mathematical Science, Associate Professor, Department of High Performance Computing and Information and Communication Technologies, Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences of the Southern Federal University, Milchakov St., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: bk@srfedu.ru

Крукиер Лев Абрамович – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра высокопроизводительных вычислений и информационно-коммуникационных технологий, Институт математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов н/Д, 344090, e-mail: krukier@srfedu.ru

Krukier Lev Abramovich – Doctor of Physical and Mathematical Science, Professor, Department of High Performance Computing and Information and Communication Technologies, Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences of the Southern Federal University, Milchakov St., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: krukier@srfedu.ru

Ранее авторами были получены границы максимум нормы матриц, обратных матрицам из некоторого подкласса блочных X -матриц. Полученные границы будут улучшены для блочных матриц Некрасова первого и второго типа на основе соответствующих результатов Л. Колотилиной.

Ключевые слова: X -матрицы, блочные матрицы, матрицы Некрасова, максимум нормы, обратные матрицы.

The maximum norm bounds of the inverse of a given matrix from some subclasses of block X -matrices were obtained. For block Nekrasov matrices, of the first and second type we will improve obtained bounds, by using a corresponding point-wise bound, published in L. Kolotilina.

Keywords: X -matrices, block matrices, Nekrasov matrices, maximum norm, inverse matrix.

Матрица $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ со свойством

Матрица $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ называется матрицей Некрасова, если

* Работа частично поддержана Министерством образования и науки Сербии, грант 174019, и Секретариатом по науке и технологическому развитию Воеводины, гранты 1136 и 3626, грантами РФФИ № 15-01-00441_а и № 14-01-31076мол_а.

$$|a_{ii}| > r_i(A) := \sum_{j \in N \setminus \{i\}} |a_{ij}|, \quad i \in N := \{1, 2, \dots, n\} \quad (1)$$

$$|a_{ii}| > h_i(A), \quad i \in N, \quad (2)$$

где $h_i(A)$, $i \in N$, определяются рекурсивно $h_1(A) = r_1(A)$

$$h_i(A) = \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| \frac{h_j(A)}{|a_{jj}|} + \sum_{j=i+1}^n |a_{ij}|, \quad i = 2, 3, \dots, n.$$

называется строго диагонально определенной (СДО) матрицей. Известно [1], что класс СДО-матриц связан с анализом сходимости классических итерационных методов. Так, для метода Якоби решения систем линейных алгебраических уравнений максимальная норма итерационной матрицы метода Якоби меньше 1 (т.е. метод сходится) тогда и только тогда, когда матрица системы является матрицей со строгим диагональным определением.

Класс матриц, связанный с анализом сходимости итерационного метода Гаусса – Зейделя, это класс матриц Некрасова. Более точно, максимальная норма итерационной матрицы метода Гаусса – Зейделя меньше 1 (т.е. метод сходится), если матрица системы есть матрица Некрасова.

Следующее утверждение было доказано в [2].

Теорема 1. Каждая матрица Некрасова невырождена.

Отметим, что оба класса матриц, и СДО, и матрицы Некрасова, принадлежат классу невырожденных Х-матриц (подробнее в [3]).

Блочные матрицы Некрасова

Два возможных обобщения точечных свойств матриц на блочную их структуру были исследованы в [4]. Кратко здесь повторим основные используемые идеи.

Через $\pi = \{\mathbf{p}_j\}_{j=0}^l$ обозначим разделение индексов множества N , если неотрицательные числа \mathbf{p}_j , $j = 1, 2, \dots, l$, удовлетворяют условиям $\mathbf{p}_0 := 0 < \mathbf{p}_1 < \mathbf{p}_2 < \dots < \mathbf{p}_l := n$.

Тогда, используя это разделение, $n \times n$ -матрица \mathbf{A} разделится на $l \times l$ блока:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1l} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{l1} & A_{l2} & \dots & A_{ll} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Для любой блочной матрицы \mathbf{A} вида (3) мы сконструируем два вообще различных, сравниваемых $(l \times l)$ -блока действительных матриц. Мы обозначим их $\langle \mathbf{A} \rangle^\pi$ и $\langle \langle \mathbf{A} \rangle \rangle^\pi$, чтобы подчеркнуть, что они зависят от разделения π .

Первая из сравниваемых матриц $\langle \mathbf{A} \rangle^\pi$ конструируется, как это предложено в [5], а вторая $\langle \langle \mathbf{A} \rangle \rangle^\pi$ – как это сделано в [6].

Первая сравниваемая матрица $\langle \mathbf{A} \rangle^\pi = [\mu_{ij}]$ определяется следующим образом:

$$\mu_{ij} = \begin{cases} \left(\|A_{ii}^{-1}\|_\infty \right)^{-1}, & i = j \text{ и } A_{ii} \text{ невырождены} \\ 0, & i = j \text{ и } A_{ii} \text{ вырождены} \\ -\|A_{ii}^{-1}\|_\infty, & i \neq j \end{cases}.$$

Вторая сравниваемая матрица $\langle \langle \mathbf{A} \rangle \rangle^\pi = [m_{ij}]$

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \text{ и } A_{ii} \text{ невырождены,} \\ -\|A_{ii}^{-1} A_{ij}\|_\infty, & i \neq j \text{ и } A_{ii} \text{ невырождены,} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Важно отметить, что все блочные классы матриц, которые будут рассматриваться здесь, будут иметь все свои диагональные блоки невырожденными, поэтому наши сравниваемые матрицы будут всегда иметь вид

$$\langle \mathbf{A} \rangle^\pi = \begin{bmatrix} \left(\|A_{11}^{-1}\|_\infty \right)^{-1} & -\|A_{12}^{-1}\|_\infty & \dots & -\|A_{1l}^{-1}\|_\infty \\ -\|A_{21}^{-1}\|_\infty & \left(\|A_{22}^{-1}\|_\infty \right)^{-1} & \dots & -\|A_{2l}^{-1}\|_\infty \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\|A_{l1}^{-1}\|_\infty & -\|A_{l2}^{-1}\|_\infty & \dots & \left(\|A_{ll}^{-1}\|_\infty \right)^{-1} \end{bmatrix},$$

$$\langle \langle \mathbf{A} \rangle \rangle^\pi = \begin{bmatrix} 1 & -\|A_{11}^{-1} A_{12}\|_\infty & \dots & -\|A_{11}^{-1} A_{1l}\|_\infty \\ -\|A_{22}^{-1} A_{21}\|_\infty & 1 & \dots & -\|A_{22}^{-1} A_{2l}\|_\infty \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\|A_{ll}^{-1} A_{l1}\|_\infty & -\|A_{ll}^{-1} A_{l2}\|_\infty & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Очевидно,

$$\text{diag}(\|A_{11}^{-1}\|_\infty, \|A_{22}^{-1}\|_\infty, \dots, \|A_{ll}^{-1}\|_\infty) \langle \mathbf{A} \rangle^\pi \leq \langle \langle \mathbf{A} \rangle \rangle^\pi. \quad (4)$$

Таким образом, можно определить два блочных варианта свойств точечных СДО и матриц Некрасова.

Определение 1. Для данного разделения π блочная матрица $\mathbf{A} = [A_{ij}]_{l \times l}$ называется:

- \mathbf{B}_I^π -СПО матрицей, если $\langle \mathbf{A} \rangle^\pi$ – СДО;
- \mathbf{B}_{II}^π -СДО матрицей, если $\langle \langle \mathbf{A} \rangle \rangle^\pi$ – СДО;
- \mathbf{B}_I^π -матрицей Некрасова, если $\langle \mathbf{A} \rangle^\pi$ – матрица Некрасова;
- \mathbf{B}_{II}^π -матрицей Некрасова, если $\langle \langle \mathbf{A} \rangle \rangle^\pi$ – матрица Некрасова.

Обратные к блочным матрицам Некрасова и известные верхние границы их максимальных норм

В работе [4, теорема 9] приведены две вообще различные возможности оценить максимум нормы обратных матриц к \mathbf{B}_I^π -матрицам Некрасова и одна возможность [4, теорема 10] для \mathbf{B}_{II}^π -матриц Некрасова. Далее повторим эти теоремы.

Пусть для произвольной матрицы $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $z_i(\mathbf{A})$, $i \in N$, рекурсивно определено

$$z_1(\mathbf{A}) = 1, \quad z_i(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| \frac{z_j(\mathbf{A})}{|a_{jj}|} + 1, \quad i = 2, 3, \dots, n.$$

Теорема 2. Если $\mathbf{A} = [A_{ij}]_{l \times l}$, \mathbf{B}_I^π -матрица Некрасова, тогда

$$\|A^{-1}\|_{\infty} \leq \frac{\max_{1 \leq i \leq l} z_i \left(\langle A \rangle^{\pi} \right)}{\min_{1 \leq i \leq l} \left(\|A_{ii}^{-1}\|_{\infty} - h_i \left(\langle A \rangle^{\pi} \right) \right)}, \quad (5)$$

$$\|A^{-1}\|_{\infty} \leq \frac{\max_{1 \leq i \leq l} \|A_{ii}^{-1}\|_{\infty} z_i \left(\langle A \rangle^{\pi} \right)}{1 - \max_{1 \leq i \leq l} \|A_{ii}^{-1}\|_{\infty} h_i \left(\langle A \rangle^{\pi} \right)}. \quad (6)$$

Теорема 3. Если $A = [A_{ij}]_{l \times l}$, B_{ii}^{π} -матрица Некрасова, тогда

$$\|A^{-1}\|_{\infty} \leq \max_{1 \leq i \leq l} \|A_{ii}^{-1}\|_{\infty} \frac{\max_{1 \leq i \leq l} z_i \left(\langle \langle A \rangle \rangle^{\pi} \right)}{\min_{1 \leq i \leq l} \left(1 - h_i \left(\langle \langle A \rangle \rangle^{\pi} \right) \right)}. \quad (7)$$

Максимум норма обратной матрицы – новые верхние границы

Для точечной матрицы Некрасова в [2] получена оценка

Теорема 4. Если $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ – (точечная) матрица Некрасова, тогда

$$\|A^{-1}\|_{\infty} \leq \max_{1 \leq i \leq n} \frac{z_i(A)}{|a_{ii}| - h_i(A)}. \quad (8)$$

Используя эту оценку, можно поправить верхние границы, представленные ранее.

Теорема 5. Если $A = [A_{ij}]_{l \times l}$, B_i^{π} -матрица Некрасова, тогда

$$\|A^{-1}\|_{\infty} \leq \max_{1 \leq i \leq l} \frac{z_i \left(\langle A \rangle^{\pi} \right)}{\|A_{ii}^{-1}\|_{\infty} - h_i \left(\langle A \rangle^{\pi} \right)}. \quad (9)$$

Теорема 6. Если $A = [A_{ij}]_{l \times l}$, $B_{ii}^{\pi} H$ -матрица Некрасова B_i^{π} , тогда

$$\|A^{-1}\|_{\infty} \leq \max_{1 \leq i \leq l} \|A_{ii}^{-1}\|_{\infty} \max_{1 \leq i \leq l} \frac{z_i \left(\langle \langle A \rangle \rangle^{\pi} \right)}{1 - h_i \left(\langle \langle A \rangle \rangle^{\pi} \right)}. \quad (10)$$

Для доказательства теорем 5 и 6 достаточно использовать основную связь между точечным и блочным случаями, установленную из [4, теорема 4]

Теорема 7. Если для данного разделения π матрица $A = [A_{ij}]_{l \times l}$:

(i) $B_i^{\pi} H$ -матрица, тогда

$$\|A^{-1}\|_{\infty} \leq \left\| \left(\langle A \rangle^{\pi} \right)^{-1} \right\|_{\infty}. \quad (11)$$

(ii) $B_{ii}^{\pi} H$ -матрица, тогда

$$\|A^{-1}\|_{\infty} \leq \max_{i \in L} \|A_{ii}^{-1}\|_{\infty} \left\| \left(\langle \langle A \rangle \rangle^{\pi} \right)^{-1} \right\|_{\infty}. \quad (12)$$

Легко видеть, что результаты теорем 5 и 6 являются прямым следствием теорем 4 и 7.

Численные примеры

Мы будем сравнивать оценки (5) – (8) с новыми оценками (9) и (10).

Рассмотрим следующие матрицы:

$$A1 = \begin{bmatrix} 11 & -7 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 9 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 6 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & -1 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A2 = \begin{bmatrix} -1,5 & -0,1 & 0 & -0,1 & 0 & 0 \\ -0,1 & -1,7 & -0,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,1 & 0,4 & -0,1 & -0,1 & -0,1 \\ 0 & 0 & -0,5 & 1 & 0 & 0 \\ -0,1 & 0 & 0 & -0,1 & 1 & -0,4 \\ 0 & 0 & -0,5 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A3 = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & 4 & 1 & -0,1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,1 & 2 & -0,4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,5 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 12 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -0,4 & 14 \end{bmatrix},$$

$$A4 = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 4 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 8 \end{bmatrix},$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} 12 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 12 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 12 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 114 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 14 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 814 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

4. Cvetković L., Doroslovački K. Max norm estimation for the inverse of block matrices // Appl. Math. Comput. 2014. Vol. 242. P. 694 – 706.

5. Fiedler M., Pták V. Generalized norms of matrices and the location of the spectrum // Czech. Math. J. 1962. Vol. 12(87). P. 558–571.

6. Feingold D.G., Varga R.S. Block diagonally dominant matrices and generalizations of the Gerschgorin circle theorem // Pacific J. Math. 1962. Vol. 12. P. 1241 – 1250.

References

1. Varga R.S. *Matrix iterative analysis*. Prentice-

Для этих пяти матриц в таблице приведены указанные выше оценки. Кроме того, для каждой матрицы самые лучшие оценки выделены жирным шрифтом. Знак «—» означает, что оценка неприменима.

Матрица A1 иллюстрирует случай, когда оценка (10) работает наилучшим образом.

Матрица A2 – пример матрицы, для которой блочные оценки первого типа (5), (6) и (9) не работают.

Матрица A3 иллюстрирует случай, когда оценка (9) работает наилучшим образом.

Матрица A4 показывает важность блочных оценок второго типа.

Матрица A5 – пример, когда оценка (8) работает наилучшим образом.

A	$\ A^{-1}_\infty\ $	(8)	(5)	(6)	(7)	(9)	(10)
A1	0,5347	1,1267	2,5029	2,5029	1,0583	2,5029	0,9828
A2	10,8364	21,9875	—	—	20,6162	—	20,6162
A3	1,0762	—	1,5848	2,4844	1,7152	1,4224	1,6141
A4	0,3445	1,2955	5,2255	5,2255	0,8391	5,2255	0,7916
A5	0,1796	0,1869	0,6204	0,4802	0,3838	0,4744	0,3106

Hall, USA, 1962, 322 p.

2. Kolotilina L.Yu. On bounding inverses to Nekrasov matrices in the infinity norm. *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, 2013, vol. 419, pp. 111-120.

3. Gudkov V.V. On a certain test for nonsingularity of matrices. *Latv. Mat. Ezhegodnik 1965*. Zinatne, Riga, 1966, pp. 385-390.

4. Cvetkovic L., Doroslovacki K. Max norm estimation for the inverse of block matrices. *Appl. Math. Comput.*, 2014, vol. 242, pp. 694-706.

5. Fiedler M., Pták V. Generalized norms of matrices and the location of the spectrum. *Czech. Math. J.*, 1962, vol. 12 (87), pp. 558-571.

6. Feingold D.G., Varga R.S. Block diagonally dominant matrices and generalizations of the Gerschgorin circle theorem. *Pacific J. Math.*, 1962, vol. 12, pp. 1241-1250.

Литература

1. Varga R.S. *Matrix iterative analysis*. Prentice-Hall, USA, 1962. 322 p.

2. Kolotilina L.Yu. On bounding inverses to Nekrasov matrices in the infinity norm // *Zap. Nauchn. Sem. POMI*. 2013. Vol. 419. P. 111 – 120.

3. Gudkov V.V. On a certain test for nonsingularity of matrices // *Latv. Mat. Ezhegodnik 1965*. Zinatne, Riga, 1966. P. 385 – 390.

Поступила в редакцию

20 февраля 2015 г.

ХИМИЯ

УДК 544.032.7

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ПРИРОДЫ РАСТВОРИТЕЛЯ НА СТРУКТУРУ И ФАЗОВЫЙ СОСТАВ НАНОРАЗМЕРНОГО ДИОКСИДА ТИТАНА

© 2015 г. А.А. Кравцов, И.А. Сысоев, А.В. Блинов,
М.А. Ясная, Д.Г. Селеменова, Л.П. Арефьева

Кравцов Александр Александрович – аспирант, кафедры технологии наноматериалов, Институт электроэнергетики, электроники и нанотехнологий Северо-Кавказского федерального университета, пр. Кулакова, 2, г. Ставрополь, 355000, e-mail: Sanya-kravtsov@ya.ru

Kravtsov Aleksander Aleksandrovich – Post-Graduate Student, Department of Technology of Nanomaterial, Institute of Electric Power Engineering, Electronics and Nanotechnologies of the North-Caucasus Federal University, Kulakov St. 2, Stavropol, 355000, Russia, e-mail: Sanya-kravtsov@ya.ru

Сысоев Игорь Александрович – доктор технических наук, доцент, директор научно-образовательного центра фотовольтаики и нанотехнологий Северо-Кавказского федерального университета, пр. Кулакова, 2, г. Ставрополь, 355000, e-mail: eianpisia@yandex.ru

Sysoev Igor' Aleksandrovich – Doctor of Technical Science, Associate Professor, Director of the Scientific-Educational Center of the Fotovoltaic and Nanotechnologies of the North-Caucasus Federal University, Kulakov St. 2, Stavropol, 355000, Russia, e-mail: eianpisia@yandex.ru

Блинов Андрей Владимирович – аспирант, кафедра технологии наноматериалов, Институт электроэнергетики, электроники и нанотехнологий Северо-Кавказского федерального университета, пр. Кулакова, 2, г. Ставрополь, 355000, e-mail: Blinov.a@mail.ru

Blinov Andrei Vladimirovich – Post-Graduate Student, Department of Technology of Nanomaterial, Institute of Electric Power Engineering, Electronics and Nanotechnologies of the North-Caucasus Federal University, Kulakov St. 2, Stavropol, 355000, Russia, e-mail: Blinov.a@mail.ru

Ясная Мария Анатольевна – кандидат химических наук, доцент, кафедра технологии наноматериалов, заместитель директора института по учебной работе, Институт электроэнергетики, электроники и нанотехнологий Северо-Кавказского федерального университета, пр. Кулакова, 2, г. Ставрополь, 355000, e-mail: jasnaja.marija@mail.ru

Yasnaya Mariya Anatol'evna – Candidate of Chemical Science, Associate Professor, Department of Technology of Nanomaterial, Deputy Director for Academic Affairs, Institute of Electric Power Engineering, Electronics and Nanotechnologies of the North-Caucasus Federal University, Kulakov St. 2, Stavropol, 355000, Russia, e-mail: jasnaja.marija@mail.ru

Селеменова Дарья Геннадиевна – магистр, кафедра технологии наноматериалов, Институт электроэнергетики, электроники и нанотехнологий Северо-Кавказского федерального университета, пр. Кулакова, 2, г. Ставрополь, 355000, e-mail: Neptun-91@bk.ru

Selemeneva Dar'ya Gennadijevna – Master Student, Department of Technology of Nanomaterial, Institute of Electric Power Engineering, Electronics and Nanotechnologies of the North-Caucasus Federal University, Kulakov St. 2, Stavropol, 355000, Russia, e-mail: Neptun-91@bk.ru

Арефьева Людмила Павловна – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра технологии наноматериалов, Институт электроэнергетики, электроники и нанотехнологий Северо-Кавказского федерального университета, пр. Кулакова, 2, г. Ставрополь, 355000, e-mail: Ludmilochka529@mail.ru

Aref'eva Lyudmila Pavlovna – Candidate of Physical and Mathematical Science, Associate Professor, Department of Technology of Nanomaterial, Institute of Electric Power Engineering, Electronics and Nanotechnologies of the North-Caucasus Federal University, Kulakov St. 2, Stavropol, 355000, Russia, e-mail: Ludmilochka529@mail.ru

Разработана технология синтеза наночастиц TiO_2 золь-гель методом. Осуществлен синтез наночастиц TiO_2 с использованием различных растворителей, в качестве которых использованы одноатомные (1-бутанол, изопропанол, бензиловый спирт) и двухатомные спирты (этиленгликоль, диэтиленгликоль). Произведены исследования структуры и состава полученных наночастиц при помощи рентгенофазового анализа и ИК-спектроскопии. С помощью фотонно-корреляционной спектроскопии был измерен размер частиц полученных образцов. Определена зависимость этих параметров от природы используемого растворителя.

Ключевые слова: наночастицы TiO_2 , спиртовая среда, золь-гель метод, рентгенофазовый анализ, ИК-спектроскопия, фотонно-корреляционная спектроскопия.

The technology of the synthesis of TiO_2 nanoparticles by sol-gel method was developed. The synthesis of TiO_2 nanoparticles using different solvents was performed. As solvents were used monohydric alcohols (1-butanol, isopropanol, benzyl alcohol) and diols (ethylene glycol, diethylene glycol). Studies of the structure and composition of the nanoparticles obtained using X-ray diffraction and IR spectroscopy were made. Particle size of the obtained samples was measured using photon correlation spectroscopy. According to the results of the data, the influence of these parameters from the nature of the solvent used was determined.

Keywords: TiO_2 nanoparticles, alcoholic medium, the sol-gel method, X-ray diffraction, infrared spectroscopy, photon correlation spectroscopy.

В последнее время наноразмерному диоксиду титана (TiO_2) уделяется большое внимание исследователей по всему миру. TiO_2 является широкозонным полупроводниковым материалом с шириной запрещенной зоны $3 \div 3,3$ эВ в зависимости от кристаллической модификации [1, 2]. Благодаря высокой фотокаталитической активности открываются широкие перспективы применения TiO_2 и его композитов в качестве эффективного катализатора разложения органических веществ [3–6]. Также в перспективе TiO_2 может найти более широкое применение в электронике и фотовольтаике [7, 8].

В связи с существованием зависимости структуры, состава и размера наночастиц TiO_2 , полученных золь-гель методом, от природы растворителя, используемого в процессе синтеза, актуальной задачей является исследование этой зависимости.

По результатам экспериментов была разработана методика синтеза наноразмерного TiO_2 . В качестве титансодержащего прекурсора использовали TiCl_4 , который растворяли в спиртах с различной молекулярной массой. Растворители – одноатомные спирты: 1-бутанол, изопропанол, бензиловый спирт; двухатомные спирты: этиленгликоль, диэтиленгликоль. Для осаждения TiO_2 использовали водный раствор аммиака.

Синтез состоял из следующих основных стадий: приготовление растворов исходных реагентов, синтез TiO_2 , гелеобразование, отмывка полученного геля центрифугированием, сушка геля при температурах 125 и 400 °С.

Структура и фазовый состав образцов исследованы методом рентгенофазового анализа. На рис. 1 представлены рентгенограммы полученных образцов TiO_2 , прокаленных при температуре 400 °С.

Расшифровка рентгенограмм показывает, что при использовании любых спиртов во всех экспериментах после просушки был получен TiO_2 тетрагональной модификации в кристаллической структуре анатаза [9]. Низкая интенсивность характеристических пиков и их ширина свидетельствуют о малой кристалличности образцов TiO_2 .

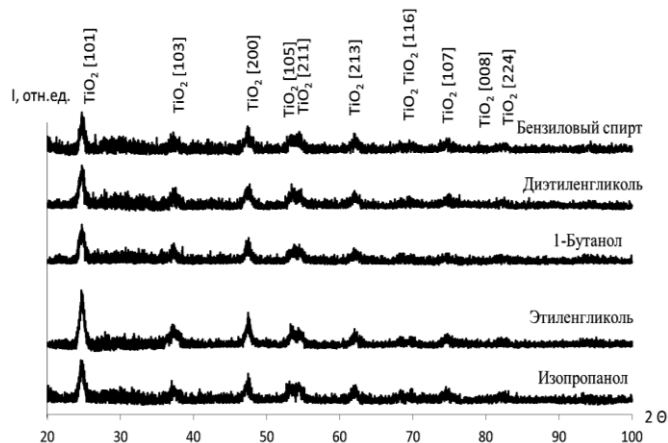


Рис. 1. Рентгенограммы образцов TiO_2 , синтезированных в различных спиртах и просушенных при температуре 400 °С

Для более детального исследования состава были сняты ИК-спектры образцов, прокаленных при температурах 100 и 400 °С. Метод ИК-спектроскопии позволяет определить содержание в образцах гидроксидов, аквакомплексов TiO_2 , адсорбированных молекул воды и изменение их концентрации в зависимости от температуры прокалывания.

На рис. 2 и 3 представлены ИК-спектры образцов TiO_2 , прокаленных при температурах 100 и 400 °С соответственно.

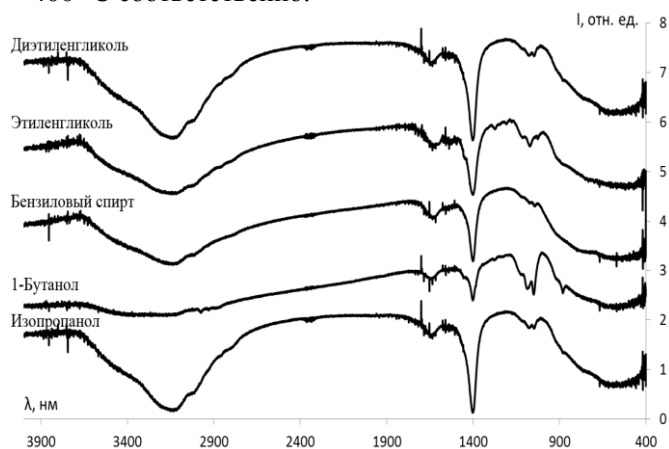


Рис. 2. ИК-спектры образцов TiO_2 , полученных в различных спиртах, после просушивания при $T = 100$ °С

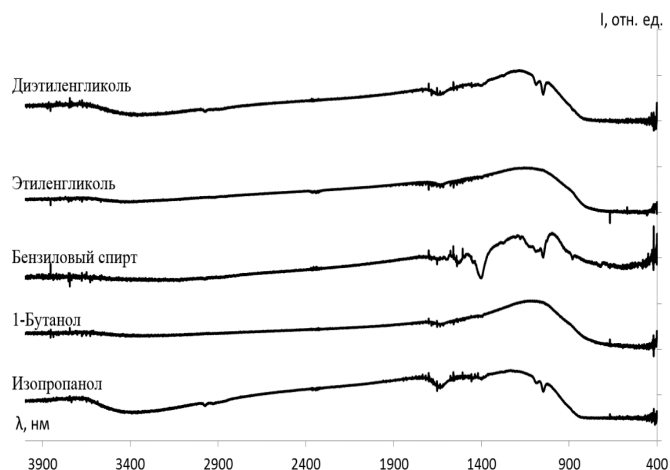


Рис. 3. ИК-спектры образцов TiO_2 , полученных в различных спиртах, после прокаливании при $T = 400^\circ\text{C}$

В ИК-спектрах синтезированных образцов можно выделить области валентных ($3950\div 2200\text{ см}^{-1}$) и деформационных ($2200\div 450\text{ см}^{-1}$) колебаний. Характеристические полосы и их расшифровка представлены в табл. 1.

Расшифровка ИК-спектров образцов, прокаленных при 100°C , вне зависимости от использованного растворителя во всех образцах показала наличие химически и физически связанной воды, гидроксид-ионов. ИК-спектры образцов TiO_2 , просушенных при температуре 400°C , характеризуются практически полным отсутствием связанной воды, аквакомплексов и гидроксидов. Наибольшую склонность к дегидратации проявили образцы диоксида титана, синтезированные в среде бутанола и этиленгликоля.

Для определения размера частиц TiO_2 синтезированные золи исследовались с помощью фотонно-корреляционной спектроскопии. Образец, синтезированный в среде бензинового спирта, невозможно

было исследовать с помощью данного метода, так как при добавлении раствора аммиака в реакционную среду наблюдалось образование геля TiO_2 , минуя стадию золя. Результаты измерений приведены в табл. 2.

Таблица 1

Характеристика колебаний [10]

Характеристические колебания	Частота, см^{-1}
Валентные колебания -ОН несвязанной водородной связью	3688
Димерно связанная водородными связями вода; антисимметричные и симметричные колебания Н-О-Н в кристаллизационной воде	3307
Валентные колебания $\text{O}=\text{C}=\text{O}$	2335
Деформационные колебания Н-О-Н в кристаллизационной воде	1630
Деформационные колебания Н-О-связанной воды	1527
Деформационные колебания гидроксидов-ОН	1396
Деформационные колебания Ti-OH	1057 – 1042
Колебания H_2O в аквакомплексах, колебания связи Ti-O	854 – 570

Таблица 2

Размеры частиц TiO_2 в синтезированных золях

Золь	Гидродинамический радиус частиц в золе, нм	Молекулярная масса растворителя, г/моль
TiO_2 в изопропанол	157	60
TiO_2 в 1-бутаноле	127,5	62
TiO_2 в этиленгликоле	915,7	74
TiO_2 в диэтиленгликоле	315	108

Гистограммы распределения гидродинамических радиусов наночастиц TiO_2 , синтезированных в среде различных растворителей, представлены на рис. 4.

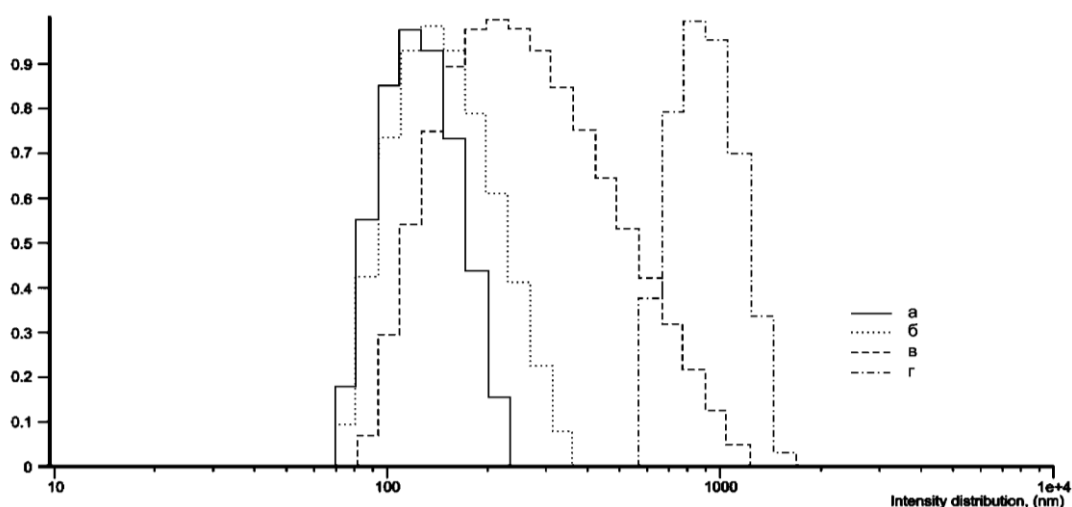


Рис. 4. Гистограммы распределения гидродинамических радиусов наночастиц TiO_2 , синтезированных в среде изопропанола (а), бутанола (б), этиленгликоля (в) и диэтиленгликоля (г)

Заключение

Исходя из полученных данных, можно сделать вывод о том, что в среде одноатомных спиртов получают частицы меньшего размера. Экспериментальные данные также подтверждают предположение об уменьшении размера частиц с увеличением молярной массы растворителя в гомологическом ряду. Таким образом, наиболее оптимальным растворителем для синтеза TiO_2 в рамках исследований, проведенных в данной работе, является 1-бутанол.

Литература

1. Look J.L., Zukoski C.F. Sol-Gel Synthesis and Hydrothermal Processing of Anatase and Rutile Titania Nanocrystals // *J. Am. Ceram. Soc.* 1992. Vol. 13. P. 1578.
2. Niederberger M. Nonaqueous sol-gels routes to metal oxide nanoparticles // *Acc. Chem. Res.* 2007. Vol. 40. P. 793–800.
3. Морозов А.Н. Синтез и каталитические свойства наноструктурированных покрытий диоксида титана: дис. ... канд. хим. наук. М., 2014. 160 с.
4. Jang H.D., Kim S.-K., Kim S.-J. Effect of particle size and phase composition of titanium dioxide nanoparticles on the photocatalytic properties // *J. of Nanoparticle Research*. 2001. Vol. 3 (2–3). P. 141–147.
5. Nolan N.T. Sol-Gel Synthesis and Characterisation of Novel Metal Oxide Nanomaterials for Photocatalytic Applications // *Doctoral Thesis*. Dublin, 2010. P. 24–26.
6. Козлов Д.В. Новые высокоактивные материалы на основе TiO_2 для фотокаталитического окисления паров органических веществ и очистки воздуха: дис. ... канд. хим. наук. Новосибирск, 2014. 329 с.
7. Ahmad A. Synthesis and applications of TiO_2 nanoparticles // *Pakistan Engineering Congress, 70th Annual Session Proceedings*. 2005. P. 403 – 412.
8. Chao C.-C. Quantum Dot Solar Cells. Stanford, 2007. P. 9.
9. Harano A., Shimada K., Okubo T., Sadokata M. Crystal phases of TiO_2 ultrafine particles prepared by laser ablation of solid rods // *J. Nanoparticle Research*. 2002. Vol. 4, № 3. P. 215–219.

10. Смит А. Прикладная ИК-спектроскопия. М., 1982. 328 с.

References

11. Look J.L., Zukoski C.F. Sol-Gel Synthesis and Hydrothermal Processing of Anatase and Rutile Titania Nanocrystals. *J. Am. Ceram. Soc.*, 1992, vol. 13, p. 1587.
12. Niederberger M. Nonaqueous sol-gel routes to metal oxide nanoparticles. *Acc. Chem. Res.*, 2007, vol. 40, pp. 793–800.
13. Morozov A.N. *Sintez i kataliticheskie svoystva nanostrukturirovannykh pokrytii dioksida titana* [Synthesis and catalytic properties of nanostructured coatings of titanium dioxide]: dis. ... kand. khim. nauk. Moscow, 2014, 160 p.
14. Jang H.D., Kim S.-K., Kim S.-J. Effect of particle size and phase composition of titanium dioxide nanoparticles on the photocatalytic properties. *J. of Nanoparticle Research*, 2001, vol. 3 (2–3), pp. 141–147.
15. Nolan N.T. Sol-Gel Synthesis and Characterisation of Novel Metal Oxide Nanomaterials for Photocatalytic Applications. *Doctoral Thesis*. Dublin, 2010, pp. 24–26.
16. Kozlov D.V. *Novye vysokoaktivnye materialy na osnove TiO_2 dlya fotokataliticheskogo okisleniya parov organicheskikh veshchestv i ochistki vozdukha* [New highly active materials based on TiO_2 for photocatalytic oxidation of organic vapors and air purification]: dis. ... kand. khim. nauk. Novosibirsk, 2014, 329 p.
17. Ahmad A. Synthesis and applications of TiO_2 nanoparticles. *Pakistan Engineering Congress, 70th Annual Session Proceedings*, 2005, pp. 403–412.
18. Chao C.-C. *Quantum Dot Solar Cells*. Stanford, 2007, p. 9.
19. Harano A., Shimada K., Okubo T., Sadakata M. Crystal phases of TiO_2 ultrafine particles prepared by laser ablation of solid rods. *J. Nanoparticle Research*, 2002, vol. 4, no 3, pp. 215–219.
20. Smit A.L. *Prikladnaya IK-spektroskopiya* [Applied infrared spectroscopy]. Moscow, 1982, 328 p.

УДК 547.642,814.1:541.14

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ АКРИДИНА ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ*

© 2015 г. А.Т. Плиева, И.Н. Абаева, С.Е. Эмануилиди, А.А. Арутюнянц

Плиева Анастасия Таировна – научный сотрудник, химико-технологический факультет, Северо-Осетинский государственный университет, ул. Ватутина, 44-46, г. Владикавказ, PCO-A, 362025, e-mail: plieva_nastya@mail.ru

Plieva Anastasiya Tairovna – Researcher, Chemical Engineering Faculty, North Ossetian State University, Vatutin St., 44-46, Vladikavkaz, RNO-A, 362025, Russia, e-mail: plieva_nastya@mail.ru

Абаева Индира Николаевна – кандидат химических наук, доцент, химико-технологический факультет, Северо-Осетинский государственный университет, ул. Ватутина, 44-46, г. Владикавказ, PCO-A, 362025, e-mail: abaeva_in@list.ru

Abaeva Indira Nikolaevna – Candidate of Chemical Science, Associate Professor, Chemical Engineering Faculty, North-Ossetian State University, Vatutin St., 44-46, Vladikavkaz, RNO-A, 362025, Russia, e-mail: abaeva_in@list.ru

Эмануилиди София Евстафиевна – научный сотрудник, химико-технологический факультет, Северо-Осетинский государственный университет, ул. Ватутина, 44-46, г. Владикавказ, PCO-A, 362025, e-mail: sofia_emanuilidi@mail.ru

Emanuilidi Sofiya Evstafievna – Researcher, Chemical Engineering Faculty, North-Ossetian State University, Vatutin St., 44-46, Vladikavkaz, RNO-A, 362025, Russia, e-mail: sofia_emanuilidi@mail.ru

Арутюнянц Анна Ашотовна – кандидат химических наук, доцент, химико-технологический факультет, Северо-Осетинский государственный университет, ул. Ватутина, 44-46, г. Владикавказ, PCO-A, 362025, e-mail: arutyunanna@mail.ru

Arutyunants Anna Ashotovna – Candidate of Chemical Science, Associate Professor, Chemical Engineering Faculty, North-Ossetian State University, Vatutin St., 44-46, Vladikavkaz, RNO-A, 362025, Russia, e-mail: arutyunanna@mail.ru

Электрохимическое поведение акридина и его производных изучено методами циклической и дифференциальной импульсной вольтамперометрии. Показано, что процесс восстановления в ацетонитриле протекает ступенчато в две стадии с образованием на первой стадии анион-радикала, на второй – дианиона; восстановление 9-хлоракридина – в четыре частично обратимые стадии с образованием заряженного димера акридина. Окисление изучаемых соединений протекает необратимо в две стадии с образованием нестабильных катион-радикала и дикатиона.

Ключевые слова: электрохимические свойства производных акридина, циклическая и дифференциальная импульсная вольтамперометрия.

Electrochemical behavior of acridine and its derivatives has been studied by cyclic and differential pulse voltammetry. It is shown that the reduction process in acetonitrile proceeds stepwise in two stages with the consequent formation of the radical-anion and dianion. Reduction of 9-chloracridine proceeds in four partially reversible stages with the formation of charged acridine dimer. All studied compounds underwent irreversible oxidation into unstable radical-cation and dication.

Keywords: electrochemical properties of acridine derivatives, cyclic and differential pulse voltammetry.

В связи с рядом ценных свойств акридин и его производные остаются в центре внимания исследователей ещё со времени их выделения из каменноугольной смолы в XIX в. Присущие им интеркалирующие свойства определили их применение в качестве антипротозойных, прежде всего противомалярийных, антибактериальных, антигрибковых и противоопухолевых средств [1–3]. Хотя акридиновые красители потеряли коммерческое значение из-за низкой светостойкости, они широко применяются в качестве люминесцентных и флуоресцентных меток в биологии [4]. Поэтому поиск среди производных акридина новых эффективных веществ, обладающих более выраженными полезными свойствами

ми, является актуальной задачей. В этой связи изучение окислительно-восстановительных свойств акридинов электрохимическими методами позволяет получить дополнительную информацию о механизмах их реакций и способствует предсказанию их спектральных характеристик.

Электрохимические свойства производных акридина изучены крайне недостаточно. Так, Кайе и соавторами [5] было найдено, что полярографическое восстановление акридина в сильноокислой среде протекает в одну одноэлектронную волну с образованием 9,9'-димера. В менее кислых и щелочных растворах обнаружены две одноэлектронные волны.

* Результаты были получены в рамках государственного задания Минобрнауки России (проект № 2754).

Позже А.И. Русаковым и сотрудниками исследовался процесс электровосстановления акридина в диметилформамиде (ДМФА) на фоне 0,02 М тетрабутиламмония перхлората [6]. Значения n_e , рассчитанные по величинам предельного тока полярографических волн и высотам пиков на кривых вольтамперометрии, согласуются между собой и незначительно отличаются от единицы. Это дает основание полагать, что первичным продуктом первой стадии электровосстановления акридина является соответствующий анион-радикал. В работе на основании расчетов дана количественная оценка влияния «размеров» ароматической системы и природы заместителей на скорость димеризации.

В данной работе изучены электрохимические свойства акридина и его 9-R-производных в ацетонитриле на фоне 0,1 М перхлората тетрабутиламмония.

Схема 1

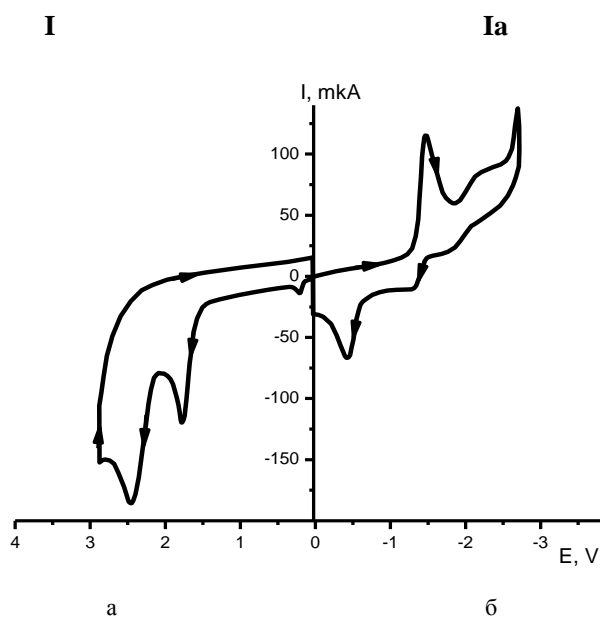


Рис. 1. Циклические вольтамперограммы окисления (а) и восстановления (б) соединения I

Результаты циклической вольтамперометрии находятся в полном соответствии с данными дифференциальной импульсной вольтамперометрии (рис. 2).

Восстановление 9-метилакридина II протекает также в две стадии аналогично восстановлению акридина I (схема 1). На первой стадии образуется устойчивый анион-радикал IIa (коэффициент обратимости $J_{па}/J_{пк} = 1,0$), на второй, судя по форме циклической вольтамперограммы и отношению $J_{па}/J_{пк}$ неустойчивый дианион IIb.

Из данных электрохимического анализа и формы циклической вольтамперограммы на стеклографитовом дисковом электроде акридин I восстанавливается в две одноэлектронные стадии, первая из которых частично обратима, вторая обратима полностью. Восстановление протекает с образованием анион-радикала Ia на первой стадии и дианиона Ib – на второй (рис. 1) по схеме 1, что согласуется с литературными данными [7].

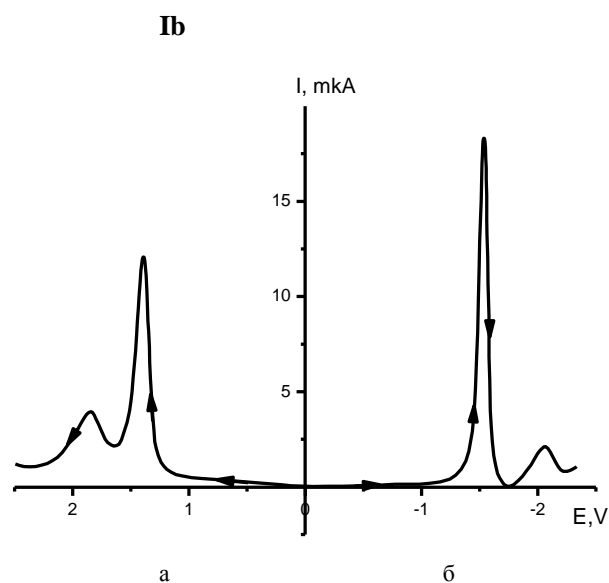


Рис. 2. Импульсные вольтамперограммы окисления (а) и восстановления (б) соединения I

В отличие от акридина I восстановление соединений II, III, IV, V протекает при более отрицательных потенциалах восстановления. Этот сдвиг связан с введением в положение 9 донорных групп. Разница в потенциалах второй волны восстановления составляет от 0,15 до 0,25 В (табл. 1).

Данные циклической вольтамперометрии подтверждены методом импульсной вольтамперометрии (табл. 2). Для соединения III электрохимическое восстановление протекает в четыре стадии по схеме 2.

Таблица 1

Характеристики циклических вольтамперограмм восстановления и окисления акридина и его производных

Соединение	Восстановление				Окисление			
	$E_{\text{пк}}, \text{В}$	$I_{\text{пк}}, \text{мкА}$	$E_{\text{па}}, \text{В}$	$I_{\text{па}}, \text{мкА}$	$E_{\text{па}}, \text{В}$	$I_{\text{па}}, \text{мкА}$	$E_{\text{пк}}, \text{В}$	$I_{\text{пк}}, \text{мкА}$
I	-1,35	95	-0,45	50	+1,75	87,5	—	—
	-2,25	17,5	-1,38	22,5	+2,4	97,5	—	—
II	-0,95	10	-0,35	32,5	+1,6	42,5	—	—
	-1,7	92,5	-1,55	17,5	+2,35	40	—	—
III	-0,45	22,5	-0,43	10	+1,6	27,5	—	—
	-1,28	10	-0,95	2,5				
	-1,95	12,5	-1,4	7,5	+2,5	50	—	—
	-2,4	37,5	-2,3	7,5				
IV	-1,45	32,5	-0,45	17,5	+1,45	27,5	—	—
	-2,5	25	-1,3	10	+2,2	72,5	—	—
V	-1,45	7,5	-0,5	5	+2,4	55	—	—
	-2,5	12,5	-1,35	5				
(Ферроцен, Fc)					0,7	85	0,64	80

Примечание. $E_{\text{па}}, E_{\text{пк}}$ – потенциалы окисления и восстановления соответственно, В; $I_{\text{па}}, I_{\text{пк}}$ – высота пика волны при окислении и восстановлении соответственно, мкА.

Таблица 2

Электрохимическое восстановление и окисление акридина и его производных методом дифференциальной импульсной вольтамперометрии

Соединение	Восстановление			Окисление		
	$H, \text{мкА}$	$E_{\text{пк}}, \text{В}$	$W_{1/2}, \text{мВ}$	$H, \text{мкА}$	$E_{\text{па}}, \text{В}$	$W_{1/2}, \text{мВ}$
I	20	-1,48	125	61	+1,73	175
	2	-2,05	200	12	+2,2	250
II	1,2	-0,9	225	3,4	+1,7	375
	24,8	-1,63	125			
III	8,9	-0,4	125	3,6	+1,3	300
	1,3	-1,18	250			
	20,0	-2,23	175			
	18,4	-2,5	175			
IV	1,5	-1,25	125	0,2	+1,35	150
	2,2	-2,3	225			
V	1,5	-1,3	100	55	2,25	200
	12,5	-2,4	125			
(Ферроцен, Fc)	—	—	—	79	0,68	120

Примечание. H – высота пика волны при окислении и восстановлении, мкА; E – потенциал при окислении и восстановлении, В; $W_{1/2}$ – потенциал полувысоты при окислении и восстановлении, мВ.

Схема 2

IIIc

IIIc



Третья и четвертая стадии приводят к образованию заряженного димера акридина **IIIc**.

Значение коэффициента обратимости, рассчитанного для первой стадии восстановления соединений **I**, **III**, **IV**, **V**, указывает на относительную устойчивость образующихся анион-радикалов. Для соединения **IV** восстановление слабо выражено за счет донорной метокси-группы. На второй стадии образуется дианион (схема 1). Дианионы соединений **II**, **III**, **IV**, **V** менее устойчивы, коэффициенты обратимости $J_{па}/J_{пк}$ равны 0,2, 0,25, 0,55, 0,4 (табл. 1). На вторичной ветви циклических вольтамперограмм после полного восстановления акридина и его производных (соединения **I–V**) до дианиона наблюдаются анодные пики, соответствующие окислению нестабильных продуктов в области потенциалов от $-0,95$ до $-1,55$ В.

На примере соединения **IV** показано, что величины максимальных токов прямо пропорциональны концентрации вещества в растворе. Зависимость логарифмов максимальных токов первой и второй стадий восстановления соединения **IV** от логарифмов скорости имеет тангенс наклона 0,44. Это позволяет заключить, что процессы ограничены скоростью диффузии вещества из объема раствора.

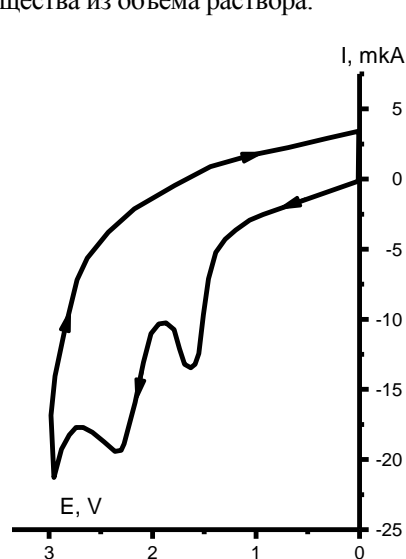


Рис. 3. Циклическая вольтамперограмма окисления соединения **III**

Данные циклической вольтамперометрии для соединений **III**, **IV** подтверждены методом импульсной вольтамперометрии (рис. 4).

Для соединения **II** на дифференциальной импульсной вольтамперограмме наблюдается один пик при

Потенциалы пиков восстановления сдвинуты в положительную, окисления – в отрицательную области потенциалов, что соответствует теоретической разнице для циклической и дифференциальной импульсной вольтамперометрии (потенциал пика в дифференциальной импульсной вольтамперометрии практически равен потенциалу полупика в циклической вольтамперометрии) [8].

Как видно из табл. 1, 2, акридин и его производные способны не только восстанавливаться, но и окисляться. Окисление соединения **I** в органических средах протекает необратимо в две стадии (табл. 1, 2), первая из которых приводит к образованию нестабильного катион-радикала **Ic** ($E_{па} = +1,75$ В), вторая – к ещё более неустойчивому дикатиону **Id** ($E_{па} = +2,4$ В) по схеме 3 (рис. 1а). Аналогично протекает окисление для соединений **II–IV** (рис. 3). Электроокисление для этих соединений протекает легче за счет присутствия электронодонорных групп в 9-м положении молекулы акридина.

Схема 3

I

Ic

Id

$E_{па} = +1,7$ В (табл. 2). Полуширина пика окисления (375 мВ) указывает на полностью необратимый процесс с учетом искажения его недостаточной компенсацией омического сопротивления фонового электролита (полуширина пика ферроцена в тех же условиях – 120 мВ, теоретическая величина полуширины обратимого одноэлектронного обратимого процесса – 90 мВ).

Окисление соединения **V** протекает в одну необратимую двухэлектронную волну при $E_{па} = +2,4$ В с образованием нестабильного дикатиона **Vc** по схеме 4.

Схема 4

V

Vc

Экспериментальная часть

Исследуемые соединения синтезировали по методикам [9–13]. Для изучения анализируемых соединений использовали электрохимическую систему, состоящую из потенциостата РА-2 и двухкоординатного самописца ЛКД-4. Рабочая скорость развертки в экспериментах составляла $5 \cdot 10^{-2} \div 5 \cdot 10^{-1}$ В/с. Электрохимическая ячейка представляла собой стеклянную пробирку на шлифе с тефлоновой пробкой. Electrodes: рабочий – стеклографитовый, сравнения – хлоросеребряный, вспомогательный – платиновый дисковый ультрамикроэлектрод. Поверхность рабочего электрода зачищали фильтровальной бумагой перед каждым регистрированием вольтамперограммы.

Обратимость процесса в методе циклической вольтамперометрии определяли по отношению тока катодного и анодного пиков (при полной обратимости это соотношение равно единице), а также по разности потенциалов катодного и анодного пиков (для обратимого процесса $E = 58$ мВ).

Ацетонитрил очищали по стандартной методике [14], перхлорат тетрабутиламмония ($\text{Bu}_4\text{N}^+\text{ClO}_4^-$) получали путем нейтрализации гидроксида тетрабутиламмония, очищали его перекристаллизацией из этанола и сушили перед использованием при 70°C в вакууме в течение суток [15].

В качестве эталона для уточнения величин потенциалов применялся ферроцен (Fc).

Литература

1. Denny W.A. Acridine Derivatives as chemotherapeutic agents // *Cur. Med. Chem.* 2002. № 9. P. 1655–1665.
2. Jeremy N. Burrows, Kelly Chibale, Wells T.N.C. // The state of the art in anti-malarial drug discovery and development // *Current Topics in Medicinal Chemistry*. 2011. № 11. P. 1226–1254.
3. Карцев В.Г., Толстиков Г.А. Азотистые гетероциклы и алкалоиды. Химия и биологическая активность азотистых гетероциклов и алкалоидов. М., 2001. С. 13–15.
4. Самсонова Л.Г., Селиванов Н.И., Копылова Т.Н., Артюхов В.Я., Майер Г.В., Плотников В.Г., Сажников В.А., Хлебунов А.А., Алфимов М.В. Экспериментальное и теоретическое исследование спектрально-люминесцентных свойств ряда акридиновых соединений // *ХВЭ*. 2009. Т. 43, № 2. С. 1–11.
5. Kaye R.C., Stonehill H.I. A polarographic study of the electroreduction of acridine // *J. Chem. Soc.* 1951. P. 27–38.

6. Русаков А.И., Мендкович А.С., Гультай В.П. Исследование димеризации анион-радикала акридина электрохимическими методами. // *Изв. АН СССР. Сер. Хим.* 1990. Вып. 6. С. 1284–1286.

7. Манн Ч., Барнес К. Электрохимические реакции в неводных системах. М., 1970. 480 с.

8. Галюс З. Теоретические основы электрохимического анализа. М., 1974. 552 с.

9. Jensen H., Friedrich M. The synthesis of 1(9)-nitro- and 3(7)-nitroacridine and 1(9)-methyl- and 3(7)-methylacridine // *J. Amer. Chem. Soc.* 1927. № 49. P. 1049–1052.

10. Shamsi M., Baradarani M.M., Afghan A., Joule J.A. Synthesis of acridan-fused quinoxalines // *ARIVOC*, 2011. № 9. P. 252–260.

11. Möller U., Cech D., Schubert F. P(III)-Acridin-derivate als synthesebausteine für die festphasensynthese nichtradioaktiv markierter oligonucleotide // *Liebigs Ann. Chem.* 1990. № 12. P. 1221–1225.

12. Wang C., Rakshit S., Glorius F. Palladium-catalyzed intermolecular decarboxylative coupling of 2-phenylbenzoic acids with alkynes via C-H and C-C bond activation // *J. Amer. Chem. Soc.* 2010. № 132. P. 14006–14008.

13. Kucherenko A.P., Potashnikova S.G., Radkova S.S., Baranov S.N., Sheinkman A.K., Volbushko N.V. Synthesis of vinyl derivatives of acridine and phenanthridine // *Chem. Heterocyclic Comp.* 1974. № 10. P. 1093–1095.

14. Вайсберг А., Проскауэр Э., Раддик Д.М. Органические растворители. М., 1985. 76 с.

15. House H.O., Peng E.N., Peet N.P. A comparison of various tetraalkylammonium salts as supporting electrolytes in organic electrochemical reaction // *J. Org. Chem.* 1971. Vol. 366, № 16. P. 2372–2373.

References

1. Denny W.A. Acridine derivatives as chemotherapeutic agents. *Cur. Med. Chem.*, 2002, no 9, pp. 1655–1665.
2. Burrows J.N., Chibale K., Wells T.N.C. The state of the art in anti-malarial drug discovery and development. *Current Topics in Medical Chemistry*, 2011, no 11, pp. 1226–1254.
3. Kartsev V.G., Tolstikov G.A. Azotistye geterotsikly i alkaloidy. *Khimiya i biologicheskaya aktivnost' azotistyykh geterotsiklov i alkaloidov* [Nitrogen heterocycles and alkaloids. Chemistry and biological activity of nitrogen heterocycles and alkaloids]. Moscow, 2001, pp. 13–15.
4. Samsonova L.G., Selivanov N.I., Kopylova T.N., Artyukhov V.Ya., Maier G.V., Plotnikov V.G., Sazhnikov V.A., Khlebunov A.A., Alfimov M.V. Eksperimental'nye i teoreticheskie issledovaniya spektral'no-lyuminescentnykh svoystv ryada akridinovykh soedinenii [Experimental and theoretical studies of spectral-luminescent proper-

ties of a number of acridine compounds]. *KhVE*, 2009, vol. 43, no 2, pp. 1-11.

5. Kaye R.C., Stonehill N.I. A polarographic study of the electroreduction of acridine. *J. Chem. Soc.*, 1951, pp. 27-38.

6. Rusakov A.I., Mendkovich A.S., Gul'tyai V.P. Issledovanie dimerizatsii anion-radikalov akridina elektrokhimicheskimi metodami []. *Izvestiya AN SSSR. Ser. khim.*, 1990, vol. 6, pp. 1284-1286.

7. Mann Ch., Barnes K. *Elektrokhimicheskie reaktsii v nevodnykh sistemakh* [Electrochemical reactions in non-aqueous systems]. Moscow, 1970, 480 p.

8. Galyus Z. *Teoreticheskie osnovy elektrokhimicheskogo analiza* [Theoretical foundations of electrochemical analysis]. Moscow, 1974, 552 p.

9. Jensen H., Friedrich M. The synthesis of 1(9)-nitro- and 3(7)-nitroacridine and 1(9)-methyl- and 3(7)-methylacridine. *J. Amer. Chem. Soc.*, 1927, no 49, pp. 1049-1052.

10. Shamsi M., Baradarani M.M., Afghan A., Joule J.A. Synthesis of acridan-fused quinoxalines. *ARIVOC*, 2011, vol. 9, pp. 252-260.

11. Möller U., Cech D., Schubert F. P(III)-acridinderivate als synthesebausteine für die festphasensynthese nichtradioaktiv markierter oligonucleotide. *Liebigs Ann. Chem.*, 1990, no 12, pp. 1221-1225.

12. Wang C., Rakshit S., Glorius F. Palladium-catalyzed intermolecular decarboxylative coupling of 2-phenylbenzoic acids with alkynes via C-H and C-C bond activation. *J. Amer. Chem. Soc.*, 2010, vol. 132, pp. 14006-14008.

13. Kucherenko A.P., Potashnikova S.G., Radkova S.S., Baranov S.N., Sheinkman A.K., Volbushko N.V. Synthesis of vinyl derivatives of acridine and phenanthridine. *Chem. Heterocyclic Comp.*, 1974, no 10, pp. 1093-1095.

14. Vaisberg A., Proskauer E., Raddik D.M. *Organicheskie rastvoriteli* [The organic solvents]. Moscow, 1985, 76 p.

1. House H.O., Peng E.N., Peet N.P. A comparison of various tetra-alkylammonium salts as supporting electrolytes in organic electrochemical reaction. *J. Org. Chem.*, 1971, vol. 36, no 16, pp. 2372-2373.

УДК 541.49 : 541.127

ВЛИЯНИЕ ПОВЕРХНОСТНО-АКТИВНЫХ ВЕЩЕСТВ НА РЕАКЦИЮ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ОРГАНИЧЕСКОГО ЛИГАНДА С ПОВЕРХНОСТЬЮ МЕТАЛЛА В УГЛЕВОДОРОДАХ

© 2015 г. Х.Х.Х. Хуссейн, В.В. Сёмченко, В.Я. Хентов

Хуссейн Ханаа Хассан Хуссейн – аспирант, кафедра общей и неорганической химии, технологический факультет, Южно-Российский государственный политехнический университет имени М.И. Платова, ул. Просвещения, 132, г. Новочеркасск, 346428, Ростовская обл., e-mail: alabajalanhanaa@yahoo.com

Hussein Hanaa Hassan Hussein – Post-Graduate Student, Department of General and Inorganic Chemistry, Faculty of Technology, Platov South-Russian State Polytechnic University, Prosvechenie, St. 132, Novocherkassk, Rostov Region, 346428, Russia, e-mail: alabajalanhanaa@yahoo.com

Сёмченко Владимир Владимирович – кандидат химических наук, доцент, кафедра общей и неорганической химии, технологический факультет, Южно-Российский государственный политехнический университет имени М.И. Платова, ул. Просвещения, 132, г. Новочеркасск, 346428, e-mail: themodan@nm.ru

Semchenko Vladimir Vladimirovich – Candidate of Chemical Science, Associate Professor, Department of General and Inorganic Chemistry, Faculty of Technology, Platov South-Russian State Polytechnic University, Prosvechenie, St. 132, Novocherkassk, Rostov Region, 346428, Russia, e-mail: themodan@nm.ru

Хентов Виктор Яковлевич – доктор химических наук, профессор, кафедра общей и неорганической химии, технологический факультет, Южно-Российский государственный политехнический университет имени М.И. Платова, ул. Просвещения, 132, г. Новочеркасск, 346428, e-mail: vkhentov@mail.ru

Khentov Viktor Yakovlevich – Doctor of Chemical Science, Associate Professor, Department of General and Inorganic Chemistry, Faculty of Technology, Platov South-Russian State Polytechnic University, Prosvechenie, St. 132, Novocherkassk, Rostov Region, 346428, Russia, e-mail: vkhentov@mail.ru

Исследовано влияние додецилсульфата натрия (SDS) на реакцию комплексообразования нуль-валентной меди с 2-бис-1-бензиденанилином в углеводородах. Определены критические концентрации перехода от молекулярного раствора SDS к раствору, содержащему мицеллы поверхностно-активных веществ (ККМ₁), и перехода, связанного с изменением симметрии этих агрегатов (ККМ₂). Выявлено экстремальное увеличение скорости при критических концентрациях мицеллообразования (ККМ) в данном углеводороде и замедление процесса в домицеллярных областях.

Ключевые слова: углеводороды, скорость комплексообразования, мицеллы, ККМ, поверхностное натяжение, вязкость.

The effect dodecyl sulfate sodium (SDS) on complexation reaction zero-valent copper bis-2-one-benzylideneaniline hydrocarbons. The critical concentration of the transition from the molecular SDS solution to a solution containing surfactant micelles (CMC₁) and transition associated with a change in the symmetry of these units (CMC₂). Revealed an extreme increase in speed at the critical micelle concentration (CMC) in the hydrocarbon and deceleration process to micellar areas.

Keywords: hydrocarbons, complexation rate, micelles, CMC, surface tension, viscosity.

Растворение металлов и их соединений с ковалентными связями в системах органический растворитель – лиганд может рассматриваться как основа ряда технологических процессов, таких как прямой метод синтеза комплексных соединений, извлечение металлов из бедных руд и техногенных отходов, перспективного способа гидрометаллургии – сольватометаллургии, размерной обработки поверхности твердых тел. О влиянии поверхностно-активных веществ (ПАВ) на эти процессы нет однозначного мнения. В работах последних лет показано, что добавки ПАВ способны направленно изменять комплексообразующие и протолитические свойства реагентов [1–3].

Вопросы, связанные с условиями комплексообразования, составом получаемых соединений, кинетикой и механизмом влияния ПАВ в неводных растворах, изучены недостаточно.

Цель данной работы – изучение влияния ионогенного ПАВ додецилсульфата натрия (SDS) на процесс комплексообразования меди (0) с 2-окси-1-бензиденанилином в углеводородных растворителях.

Введём сокращения: ККМ₁ – критические концентрации перехода от молекулярного раствора SDS к раствору, содержащему мицеллы ПАВ; ККМ₂ – перехода, связанного с изменением симметрии этих агрегатов; ККМ – критические концентрации мицеллообразования.

Углеводородные среды позволяют получать в одностадийном процессе товарный продукт – композиции хелатных соединений металлов. Они могут быть использованы для залечивания микротрещин двигателей внутреннего сгорания и трансмиссий образующимися наночастицами металла при термическом разложении комплексных соединений. К сожалению, в литературе отсутствуют данные о ККМ SDS в углеводородах. Значения ККМ определялись методом Ребиндера посредством измерения поверхностного натяжения на межфазной границе. Проведённые исследования показали, что при увеличении концентрации ПАВ поверхностное натяжение растворов уменьшается до достижения определенной концентрации и далее остается неизменным. По пересечению касательных определяли значение ККМ₁. При дальнейшем увеличении концентрации ПАВ на кривых σ -C_{ПАВ} появлялись максимальные значения σ . Точки изгиба интерпретировались как ККМ₂. В литературе описаны некоторые растворы ПАВ, в которых фиксировались ККМ высших порядков [4, 5], что связывают с изменением мицеллярной структуры. Так как взаимодействие между молекулами ПАВ больше, чем между молекулами малополярных углеводородов, то изменения ПАВ незначительны. Вследствие этого значения ККМ параллельно уточняли вискозиметрическим методом. Измерения вязкости проводили капиллярным вискозиметром Убеллоде при 290 К. Величины ККМ₁ и ККМ₂ находили как концентрации, соответствующие экстремумам приведённой вязкости для данного растворителя.

Исследование комплексообразования меди проводили в растворе углеводорода, содержащего 2-окси-1-бензилиденанилин (0,1 М), SDS при концентрациях выше и ниже ККМ₁ и ККМ₂, компактную медь (пластина площадью 6,25 см²) при интенсивном перемешивании и свободном доступе кислорода воздуха, температуре 298 К. Скорость реакции определяли по изменению концентрации комплексного соединения меди фотоколориметрическим методом (длина волны 490 нм, ширина кюветы 1 см) и по изменению массы меди. УФ-спектры растворов регистрировали на спектрофотометре HITACHI UV 1800. Состав комплексных соединений определяли методом Гарвея – Менинга и совокупностью методов УФ, ИКС, элементного анализа.

Следует отметить аномальное изменение приведенной вязкости SDS в углеводородах. В области низких концентраций ПАВ она принимает отрицательные значения. Подобные аномальные изменения свойств неводных мицеллообразующих растворов в зависимости от содержания ПАВ связывают с появлением систем, содержащих ассоциаты разного размера и формы, образующиеся в широком диапазоне концентраций их компонентов [6]. При этом, в от-

личие от водных систем, возможен разрыв взаимодействий между макромолекулами вследствие их более ярко выраженной симметризации.

В табл. 1 представлены величины ККМ₁ и ККМ₂ SDS в углеводородах, найденные как средние значения ККМ, полученные по измерению поверхностной активности и приведенной вязкости растворов ПАВ. Разница значений между ними составляла не более 5 %.

Таблица 1

Значения ККМ₁ и ККМ₂ растворов SDS

Углеводород	ККМ·10 ⁴ , моль/л (мас, %)	
	ККМ ₁	ККМ ₂
Гексан	17,30 (0,54)	342 (0,9)
Гептан	6,93 (0,02)	27,74 (0,07)
Октан	27,7 (0,08)	–
Нонан	13,87 (0,04)	41,6 (0,12)
Декан	0,67 (0,025)	34,6 (0,09)

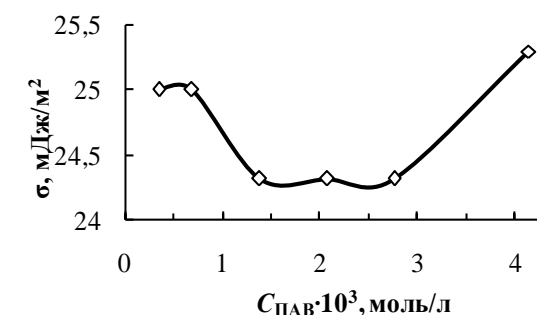
Комплексные соединения меди, полученные в наноструктурированных растворах ПАВ, имеют состав 1:2 (CuL₂) и идентифицированы как бис(2-окси-1-бензилиденанилинато) медь с $\lambda_{\max} = 210, 292, 328, 340$ нм.

Изменение концентрации SDS от домицеллярной области к мицеллярной мало отражается на составе образующегося комплекса.

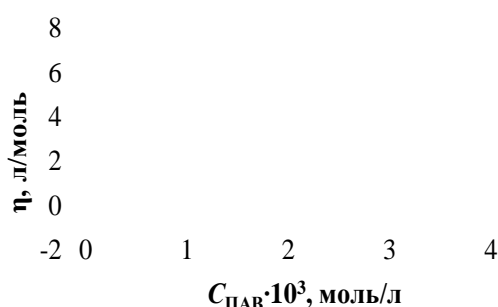
При высоких концентрациях ПАВ появляется полоса $\lambda_{\max} = 720$ нм, по-видимому, соответствующая образованию ассоциата CuL₂ ПАВ. Образование подобных ассоциатов в углеводороде описано в работе [3].

Исследование кинетических закономерностей взаимодействия поверхности меди с лигандом в наноструктурированных системах, содержащих организованные ансамбли мицелл и их реорганизованные глобулярные частицы, показало, что они носят сложный характер. На рисунке в качестве примера приведены зависимости свойств раствора и скорости реакции от концентрации ПАВ. Растворитель – нонан. В концентрационных областях ПАВ, равных ККМ₁ и ККМ₂, зависимость скорости реакции от концентрации SDS имеет резко выраженные экстремумы, при этом скорость в области ККМ₁ принимает высокие значения. В домицеллярной области концентраций ПАВ интенсивность комплексообразования меньше по сравнению с системами, не содержащими мицеллообразующие компоненты.

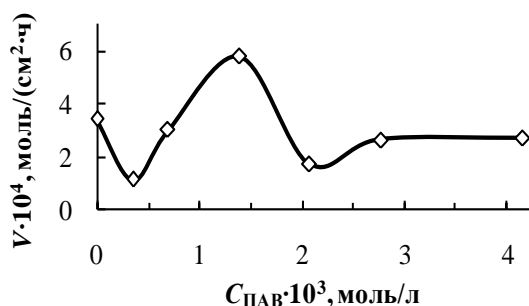
В интервале концентраций от ККМ₁ до ККМ₂ скорость падает до значений, характерных для домицеллярной области, т.е. меньших, чем без добавления ПАВ [7]. В табл. 2 представлены значения экстремальных скоростей реакции прямого синтеза комплексных соединений в углеводородах и концентраций SDS, соответствующие этим экстремальным значениям.



а



б



в

Зависимость поверхностного натяжения σ – а; приведенной вязкости η – б; скорости комплексообразования V – в; от концентрации ПАВ в системе медь–лиганд–нонан–SDS

Таблица 2

Скорость реакций комплексообразования без введения ПАВ (V_1), с введением SDS (V_2), концентрация SDS в углеводороде*

Угле- водород	Скорость комплексообразования			V_1/V_2
	$V_1 \cdot 10^5$ моль/(см ² ·ч)	$V_2 \cdot 10^5$ моль/(см ² ·ч)	$C \cdot 10^4$, моль/л	
Гексан	0,37	75,4	17,30	204
Гептан	5,0	10,5	6,93	2,1
Октан	4,5	20,1	27,7	4,5
Нонан	34	57,8	13,87	1,7
Декан	2,7	6,5	0,67	2,4

*— следует отметить, что в гексане зафиксировано только одно экстремальное значение скорости в области ККМ₁.

Подобные кинетические эффекты комплексообразования можно объяснить механизмом реакции. Обратные мицеллы наноструктурированных растворов SDS адсорбируют лиганд, что подтверждается увеличением размеров мицелл во времени с 110 до 175 нм, измеренных турбидиметрическим методом [8].

Мицеллы, предварительно накопившие молекулы лиганда, адсорбируются на металле и разрушаются. Это приводит к увеличению концентрации лиганда в реакционной зоне и экстремальному увеличению скорости. Органический лиганд может располагаться в мицелле различным образом: адсорбироваться на поверхности мицеллы, проникать в гидрофобный поверхностный слой на различную глубину, внедряться в ядро мицеллы. Экстремальное увеличение адсорбции в области ККМ в системах ПАВ – сорбент может быть обусловлено преимущественно электростатическим взаимодействием разноименно заряженных частиц SDS (поверхность мицелл SDS в малополярных растворителях заряжена отрицательно) и поверхности сорбента. Все это приводит к высокой степени концентрирования мицелл на поверхности оксидированного металла. Известно, что изотерма адсорбции ионных ПАВ на полярных сорбентах (SiO_2 , Al_2O_3) характеризуется резко выраженными максимумами в области ККМ [9].

Выводы

Введение ПАВ в донорно-акцепторные системы может как ускорять, так и снижать скорость реакции комплексообразования. Экстремумы скорости наблюдаются при концентрации ПАВ, практически совпадающей с ККМ₁ и ККМ₂ в данном растворителе; снижение характерно для домицеллярной области концентраций. Удлинение цепи углеводородного растворителя в ряду гексан–декан также приводит к снижению эффективности координационного взаимодействия. Полученные данные позволяют интенсифицировать синтез комплексных соединений.

Литература

1. Сальников Ю.И., Боос Г.А., Рыжкина И.С., Лукашенко С.С., Мингалеева Г.Р. Комплексообразование меди (II) с 2,6-бис (диметиламинометил)-4-метилфенолом в присутствии поверхностно-активных веществ // Коллоид. журн. 2007. Т. 69, № 5. С. 673.
2. Даидэндэв Бурмаа, Иванов В.М., Фигуровская В.Н. Влияние поверхностно-активных веществ и внешних условий на комплексообразование эрбия с 5-Br-ПААВ // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 2. Химия. 2000. Т. 41, № 2. С. 115–118.

3. Герасимов О.В., Пармов В.Н. Связывание $\text{Ru}(\text{bpy})_3^{3+}$ с мицеллами додецилсульфата натрия // Журн. физ. химии. 1987. Т. LXI, вып. 9. С. 2527–2531.

4. Абрамович С.Ш., Мингазова Р.А., Фукс Г.И. Измерение критической концентрации мицеллообразования поверхностно-активных веществ в неполярных жидкостях // Коллоид. журн. 1976. Т. 38, № 2. С. 230–233.

5. Евдокимов И.Н., Елисеев Н.Ю. Концентрационные изменения мицеллярной структуры в неводных растворах // Коллоид. журн. 1990. Т. 52, вып. 5. С. 965–967.

6. Волков В.А., Орлов В.Д. Мицеллообразование в неводных растворах стеарата и нафтената кобальта // Коллоидный журн. 1986. Т. 38, № 6. С. 1065–1069.

7. Задымова Н.М., Аршакаян Г.А., Куличейкин В.Г. Обратные и двойные эмульсии как основа микрогетерогенных матриц для трансдермальной доставки липофильных лекарств // Изв. АН РАН. Сер. Химия. 2013. № 3. С. 801–814.

8. Хентов В.Я., Хуссейн Х.Х.Х. Доставка лиганда мицеллами в процессе прямого синтеза комплексных соединений // Междунар. науч.-исслед. журн. 2014. № 10 (29), Ч. 1. С. 35–37.

9. Барвиченко В.Н., Липковская Н.А., Федянина Т.В. Адсорбция катионного ПАВ мирамистина из водных растворов на поверхности высокодисперсного кремнезёма // Коллоидный журн. 2013. Т. 75, № 6. С. 683–688.

References

1. Sal'nikov Yu.I., Boos G.A., Ryzhkina I.S., Lukashenko S.S., Mingaleeva G.R. Kompleksoobrazovanie medi(II) s 2,6-bis(dimetilaminometil)-4-metilfenolom v prisutstvii poverkhnostno-aktivnykh veshchestv [Complexing of copper (II) with 2,6-bis(dimethylamino-methyl)-4-methylphenol in the presence of surfactants]. *Kolloidnyi zhurnal*, 2007, vol. 69, no 5, p. 673.

2. Dashdendev Burmaa, Ivanov V.M., Figurovskaya V.N. Vliyanie poverkhnostno-aktivnykh veshchestv i vneshnikh uslovii na kompleksoobrazovanie erbiya s 5-Vg-PAAF [Influence of surfactants and external conditions on complexation with erbium 5-Br-PAAF]. *Vestn. Mosk. un-ta. Khimiya*, 2000, vol. 41, no 2, pp. 115–118.

3. Gerasimov O.V., Parmon V.N. Svyazyvanie $\text{Ru}(\text{bpy})_3^{3+}$ s mitsellami dodetsilsul'fata natriya [Binding of $\text{Ru}(\text{bpy})_3^{3+}$ with micelles of sodium dodecyl sulfate]. *Zhurnal fizicheskoi khimii*, 1987, vol. 61, no 9, pp. 2527–2531.

4. Abramovich S.Sh., Mingazova P.A., Fuks G.I. Izmerenie kriticheskoi kontsentratsii mitselloobrazovaniya poverkhnostno-aktivnykh veshchestv v nepolyarnykh zhidkostyakh [Measurement of critical micelle concentration of surfactants in non-polar liquids]. *Kolloidnyi zhurnal*, 1976, vol. 38, no 2, pp. 230–233.

5. Evdokimov I.N., Eliseev N.Yu. Kontsentratsionnye izmeneniya mitsellyarnoi struktury v nevodnykh rastvorakh [Concentration change of micellar structures in non-aqueous solutions]. *Kolloidnyi zhurnal*, 1990, vol. 52, no. 5, pp. 965–967.

6. Volkov V.A., Orlov V.D. Mitselloobrazovanie v nevodnykh rastvorakh stearata i naftenata kobal'ta [Micelle formation in a non-aqueous solutions stearate and cobalt naphthenate]. *Kolloidnyi zhurnal*, 1986, vol. 38, no 6, pp. 1065–1069.

7. Zadyмова N.M., Arshakyan G.A., Kulicheikin V.G. Obratnye i dvoynye emul'sii kak osnova mikrogeterogennykh matrits dlya transdermal'noi dostavki lipofil'nykh lekarstv. *Izvestiya RAN. Khimiya*, 2013, no 3, pp. 801–814.

8. Khentov V.Ya., Khussein Kh.Kh.Kh. Dostavka liganda mitsellami v protsesse pryamogo sinteza kompleksnykh soedinenii [Delivery ligand micelles during direct synthesis of complex compounds]. *Mezhdunarodnyi nauchno-issledovatel'skii zhurnal*, 2014, no 10 (29), part 1, pp. 35–37.

9. Barvichenko V.N., Lipkovskaya N.A., Fedyanina T.V. Adsorbtsiya kationnogo PAV miramistina iz vodnykh rastvorov na poverkhnosti vysokodispersnogo kremnezema [Adsorption of miramistin cationic surfactants from aqueous solution onto the surface of finely divided silica]. *Kolloidnyi zhurnal*, 2013, vol. 75, no 6, pp. 683–688.

БИОЛОГИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 599.426

**НОВЫЕ НАХОДКИ РЫЖЕЙ ВЕЧЕРНИЦЫ
(*NYCTALUS NOCTULA*) В Г. РОСТОВЕ-НА-ДОНУ**

© 2015 г. А.В. Малиновкин

Малиновкин Алексей Вячеславович – аспирант, кафедра зоологии, Южный федеральный университет, пр. Стачки, 194/1, г. Ростов н/Д, 344090, e-mail: alexblaze1@mail.ru

Malinovkin Aleksei Vyacheslavovich – Post-Graduate Student, Department of Zoology, Southern Federal University, Stachki Ave., 194/1, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: alexblaze1@mail.ru

В Ростовской области рыжая вечерница является обычным мигрирующим видом. В последние годы наблюдаются ее многочисленные зимовочные колонии в г. Ростове н/Д и других населенных пунктах. Материалом для данной статьи послужили сборы рукокрылых в пределах Ростова н/Д. Проведен морфометрический, численный, половой и возрастной анализ 988 особей, отмеченных в августе–ноябре 2014 г. Все рыжие вечерницы были встречены в отапливаемых убежищах, связанных исключительно со строениями людей. Большинство особей собрано в центральной части города в многоэтажных домах.

Ключевые слова: летучие мыши, Ростов н/Д, рукокрылые, рыжая вечерница, *Nyctalus noctula*, антропогенный ландшафт.

In the Rostov Region noctule is a common migratory species. Recent years have seen her many wintering colony in the city of Rostov-on-Don and other settlements. The material for this article was collected charges are bats in the city of Rostov-on-Don. Conducted morphometric, numerical, sex and age analysis of 988 individuals identified in the August–November 2014. All noctule were met in heated shelters associated exclusively with buildings people. Most specimens were collected in the central part of the city in multi-storey buildings.

Keywords: bats, Rostov-on-Don, bats, noctule, *Nyctalus noctula*, anthropogenic landscape.

Рыжая вечерница (*Nyctalus noctula* Schreber, 1774) – типичный мигрант, широко распространенный вид. Встречается от балтийского побережья, Санкт-Петербурга, южных частей Кировской и Оренбургской областей до южных границ; с востока на запад – от реки Енисей до западных границ [1, 2]; на Северном Кавказе – почти на всей территории Западного Предкавказья, Ставропольской возвышенности, Пятигорья и на всей предгорной части Северного Кавказа [3].

О первых находках единичных самцов *Nyctalus noctula* в Ростовской области (РО) сообщает Зверозомб-Зубовский: в июле 1917 г. – в г. Новочеркасск; 02.04.1920 и 20.04.1923 гг. – в г. Ростове [4]. Одна самка была поймана 22.05.1948 г. в пос. Веселом одноименного района. С 1950 г. рыжих вечерниц многократно отмечали в Ростове на Зеленом острове [5–7]. В мае 1962 г. колонию беременных самок находили в г. Пролетарске, а колонию самцов более чем из 100 особей – в с. Синявском Не-

клиновского района [5]. В Александровском лесхозе 24.04.2010 г. в дупле дуба пойманы 13 самок и один самец рыжей вечерницы. Наблюдения при помощи бет-детектора Pettersson D240X 22-24.04.2010 г. показали очень высокую плотность этого вида у всех обследованных водоемов [8].

Все эти данные указывают на то, что большая часть всех рыжих вечерниц была встречена за пределами города в естественных убежищах. Лишь небольшое количество особей поймано в жилых зданиях в непосредственной близости к человеку. До 2009 г. считалось, что рыжие вечерницы – типичные мигранты и в РО находятся, в большинстве случаев, на пролете. Исключением являлись немногочисленные находки особей, вероятнее всего, не успевших из-за холодов мигрировать в более теплый Краснодарский край [7]. Но в начале октября 2009 г. в одном из парков Ростова впервые было обнаружено естественное зимовочное убежище рыжих вечерниц [9].

Вечерницы, зимующие в естественных убежищах, при стабильно низких температурах сохраняют к середине зимы достаточное количество жировой ткани. В то же время в г. Краснодаре из-за частых зимних оттепелей уровень метаболизма животных намного выше, что приводит к их истощению на момент наступления наиболее холодного периода зимовки [9].

Зимой 2009 г. была найдена колония в старом здании центральной части города, в научно-исследовательском институте на ул. им. Максима Горького. Летучих мышей обнаружили при смене оконных рам. Было отловлено 15 особей (из них 4 самки и 11 самцов). При вскрытии у всех самок матки были заполнены светлой густой массой. Микроскопическое изучение тонких срезов матки ($8 \cdot 10^{-6}$ м), окрашенных гематоксилин-эозином, позволило обнаружить в этой субстанции многочисленные овальные клетки, которые являются трансформированными сперматозоидами, сохраняющимися в половой системе самок в течение всего периода зимней спячки.

В последующие годы обнаруживались небольшие колонии рыжих вечерниц как в естественных условиях, так и в антропогенных ландшафтах. Эти колонии насчитывали не более 30 особей и преимущественно состояли из самок.

Наибольшее количество находок было зарегистрировано в августе – ноябре 2014 г. За этот период было собрано 988 особей. Из них самок было 647, самцов – 341. В большинстве случаев колонии были расположены в многоквартирных домах старого жилого фонда, не ниже 4-го этажа, в Первомайском, Ленинском и Железнодорожном районах. Летучие мыши занимали пространство между внешней и внутренней обшивкой лоджий. Многие жильцы таких квартир жаловались на шум и неприятный запах, который они справедливо связывали с присутствием летучих мышей.

Именно обращения жителей позволили обнаружить упомянутые скопления рыжих вечерниц. Половозрастная структура обследованных скоплений вечерниц существенно отличалась. Вероятно, при образовании зимовочных колоний в одних убежищах останавливаются зверьки, продолжающие миграционные перемещения, а в других – особи, оставшиеся зимовать. Мигрирующие особи, как правило, занимают убежища, непригодные для длительной зимовки. Зимующие летучие мыши выбирают более надежные убежища, в которые собираются зверьки из небольших летних укрытий [7]. Так, в одной из квартир на лоджии было обнаружено 220 особей рыжей вечерницы.

У всех отловленных зверьков определялась масса тела (с точностью до 0,1 г), длина предпле-

чья и тела; фиксировалась возрастная и половая принадлежность. Возраст определялся визуально по степени износа верхних клыков. При оценке износа выделялось 6 категорий: 1. Зубы острые, явно молодые животные. У самок к этой категории относили еще не рожающих [10]. 2. Зубы острые: кончики клыков не имеют выраженного износа. 3. Зубы округлены: острие клыка притуплено, но не имеет плоской поверхности. 4. Зубы слегка сточены (на $1/8 \div 1/7$). 5. Зубы сточены на $1/6 \div 1/5$. 6. Зубы сточены на $1/4$ и более. Для определения категории изношенности зубов учитывалось состояние обоих верхних клыков. В большинстве случаев один из них был сломан, изношен сильнее или вообще отсутствовал. В таких случаях возрастная категория определялась по наименее изношенному клыку [11]. В целом метод оценки возраста по состоянию зубов довольно неточен и может приводить к весьма противоречивым результатам [10].

Все нерожающие самки были отнесены к возрасту не старше одного года. Данные по износу зубов и репродуктивному состоянию самок свидетельствуют о том, что в категорию животных с острыми зубами входит большинство нерожающих самок. Вероятнее всего, самки с острыми зубами имеют возраст до 1,5 года, а большинство – до 1 года.

У самцов аналогичное состояние зубов проявляется в других возрастных группах. С самцами ситуация обстоит немного сложнее: на втором году жизни в большинстве случаев зубы у них остаются острыми. Это обстоятельство, вероятно, обусловлено различиями в интенсивности питания и составе корма. У самок быстрый износ зубов зависит от беременности (у всех животных при беременности часто возникает дефицит кальция, который приводит к уменьшению слоя эмали и более быстрому стиранию зубов), вывода и вскармливания потомства (необходимо больше и чаще питаться). При этом у самцов нагрузка на зубной аппарат гораздо слабее в силу довольно размеренного образа жизни. Таким образом, у самок с возрастом степень сточенности зубов будет существенно отличаться от зубов самцов [11].

Данные об экстерьерных особенностях обследованных летучих мышей и информация о половозрастной структуре обнаруженных скоплений рыжей вечерницы приводятся в табл. 1 и 2.

Таблица 1
Количественное соотношение самок и самцов
всех пойманных особей

Пол	Всего	Взрослые	Молодые
Самка	647	422	225
Самец	341	98	243

Таблица 2

Размеры и масса тела рыжих вечерниц в соотношении пола и возраста

Пол	Возраст	Масса тела, г			Длина предплечья, мм			Длина тела, мм		
		Средняя	Минимальная	Максимальная	Средняя	Минимальная	Максимальная	Средняя	Минимальная	Максимальная
Самки	Все	32,3	18,5	39,9	53,1	48,1	57,9	71,1	60,2	81,9
	Взрослые	35,0	20,3	39,9	53,0	48,1	57,9	71,1	60,2	81,9
	Молодые	27,0	18,5	30,9	53,1	48,1	57,9	71,1	60,2	81,8
Самцы	Все	23,3	18,1	35,7	53,0	48,1	57,9	71,5	60,1	81,8
	Взрослые	27,0	25,0	35,7	52,9	48,2	57,9	71,9	60,3	81,8
	Молодые	21,8	18,1	28,6	53,0	48,1	57,8	71,3	60,1	81,6

Анализ всех полученных данных показал, что в половом соотношении самки преобладают над самцами. На основе литературных данных [11] и оригинальных наблюдений все найденные колонии являются зимующими. Это объясняется тем, что данному виду рукокрылых свойственна гаремная полигиния, поэтому взрослые самцы образуют гонные колонии, в которых присутствуют обычно от 6 до 20 самок. При подготовке к зимовке гонные колонии могут объединяться от 50 и более особей в одном убежище, увеличивая свою численность за счет молодых самок и самцов, которые не образуют гонную колонию.

Отличие в количественном отношении взрослых и молодых самцов следует рассматривать как характерную особенность данного вида. Взрослые самцы массово находятся в выводковых колониях только во время гона, после окончания периода интенсивного спаривания распределяются по близлежащей территории более равномерно, нежели самки. У самцов старших возрастов не выражена явная филопатрия (в отличие от самок) [10].

Что касается различий по трем основным параметрам (масса тела, длина предплечья и длина тела), то у самок прослеживается явный половой диморфизм по весовым значениям. Самки обладают большей массой тела, чем самцы. По длине предплечья и длине тела самки практически не отличаются от самцов. Различие в весе, вероятно, связано с тем, что самкам необходимо немного больше запаса жировой ткани для благоприятного протекания беременности и дальнейшего вскармливания детенышей.

Литература

1. Кузякин А.П. Летучие мыши (Систематика, образ жизни и польза для сельского и лесного хозяйства). М., 1950. 442 с.
2. Кузякин А.П. Зоогеография СССР. М., 1962. 125 с.

3. Темботов А.К. География млекопитающих Северного Кавказа. Нальчик, 1972. 245 с.

4. Зверозомб-Зубовский Е.В. К познанию фауны млекопитающих Донской области (материалы по естественно-историческому изучению края). Ростов н/Д., 1923. 30 с.

5. Казаков Б.А., Ярмыш Н.Н. О фауне рукокрылых Предкавказья // Материалы I Всесоюз. совещ. по рукокрылым (Chiroptera). Л., 1974. С. 69–72.

6. Ярмыш Н.Н., Казаков Б.А., Сониная И.Ю., Усвайская А.А. Задачи в исследовании фауны рукокрылых Северного Кавказа // Биол. аспекты охраны редких животных. М., 1981. С. 119–121.

7. Газарян С.В., Казаков Б.А. Экология рыжей вечерницы *Noctalus noctula* на Северном Кавказе и в Предкавказье. Сообщение 1: Характер пребывания, убежища, колониальность, гонное поведение. *Plecotus et al. pars spec.* 2002. С. 74–82.

8. Газарян С.В., Бахтадзе Г.Б., Малиновкин А.В. Современное состояние изученности рукокрылых Ростовской области // *Plecotus et al.* 2010. №. 13. С. 50–58.

9. Газарян С.В., Малиновкин А.В. О зимовке рыжих вечерниц в дупле дерева в г. Ростове-на-Дону // *Plecotus et al.* 2010. № 13. С. 48–49.

10. Стрелков П.П., Абрамов А.В. Соотношение полов и возрастной состав самцов в разных частях ареала в сезон вывода потомства у перелетных видов летучих мышей (Chiroptera, Vespertilionidae) Восточной Европы и смежных территорий // Зоол. журн. 2001. Т. 80, №. 2. С. 222–229.

11. Газарян С.В., Казаков Б.А. Экология рыжей вечерницы *Noctalus noctula* на Северном Кавказе и в Предкавказье. Сообщение 2. Сезонная динамика полового и возрастного состава. *Plecotus et al., pars spec.* 2002. С. 83–88.

References

1. Kuzyakin A.P. *Letuchie myshi (Sistematika, obraz zhizni i pol'za dlya sel'skogo i lesnogo khozyaistva)* [Bats (Systematics, lifestyle and use for agriculture and forestry)]. Moscow, 1950, 442 p.

2. Kuzyakin A.P. *Zoogeografiya SSSR* [Zoogeography USSR]. Moscow, 1962, 125 p.
3. Tembotov A.K. *Geografiya mlekopitayushchikh Severnogo Kavkaza* [Geography mammals of the North Caucasus]. Nalchik, 1972, 245 p.
4. Zverozomb-Zubovskii E.V. *K poznaniyu fauny mlekopitayushchikh Donskoi oblasti (materialy po estestvenno-istoricheskomu izucheniyu kraya)* [To the knowledge of mammal fauna of the Don region (materials on natural-historical study of the province)]. Rostov-on-Don, 1923, 30 p.
5. Kazakov B.A., Yarmysh N.N. [About bat fauna of the Caucasus]. *Materialy I Vsesoyuznogo soveshchaniya po rukokrylym (Chiroptera)* [Proceedings of the 1 All-Union Conference on bats (Chiroptera)]. Leningrad, 1974, pp. 69-72.
6. Yarmysh N.N., Kazakov B.A., Sonina I.Yu., Usvaiskaya A.A. *Zadachi v issledovanii fauny rukokrylykh Severnogo Kavkaza* [Objectives of the study bat fauna of the North Caucasus]. *Biologicheskie aspekty okhrany redkikh zhivotnykh*, Moscow, 1981, pp. 119-121.
7. Gazaryan S.V., Kazakov B.A. *Ekologiya ryzhei vechernitsy Nyctalus noctula na Severnom Kavkaze i v Predkavkaz'e. Soobshchenie 1. Kharakter prebyvaniya, ubezhishcha, kolonial'nost', gonnoe povedenie* [Ecology of *Nyctalus noctula* in the North Caucasus and the Caucasus. Report 1. Type of stay, asylum, colonial, surge behavior]. *Plecotus et al., pars spec.*, 2002, pp. 74-82.
8. Gazaryan S.V., Bakhtadze G.B., Malinovkin A.V. *Sovremennoe sostoyanie izuchennosti rukokrylykh Rostovskoi oblasti* [The current state of knowledge of bats in Rostov region]. *Plecotus et al.*, 2010, no 13, pp. 50-58.
9. Gazaryan S.V., Malinovkin A.V. *O zimovke ryzhikh vechernits v duple dereva v g. Rostov-na-Donu* [About noctules wintering in the hollow of a tree in the city of Rostov-on-Don]. *Plecotus et al.*, 2010, no 13, pp. 48-49.
10. Strelkov P.P., Abramov A.V. *Sootnoshenie polov i vozrastnoi sostav samtsov v raznykh chastyakh areala v sezon vyvoda potomstva u pereletnykh vidov letuchikh myshei (Chiroptera, Vespertilionidae) Vostochnoi Evropy i smezhnykh territorii* [Sex ratio and age structure of males in different parts of the area in the breeding season in migratory species of bats (Chiroptera, Vespertilionidae) in Eastern Europe and adjacent territories]. *Zoologicheskii zhurnal*, 2001, vol. 80, no 2, pp. 222-229.
11. Gazaryan S.V., Kazakov B.A. *Ekologiya ryzhei vechernitsy Nyctalus noctula na Severnom Kavkaze i v Predkavkaz'e. Soobshchenie 2. Sezonnaya dinamika polovogo i vozrastnogo sostava* [Ecology of *Nyctalus noctula* in the North Caucasus and the Caucasus. Report 2. The seasonal dynamics of sex and age composition]. *Plecotus et al., pars spec.*, 2002, pp. 83-88.

УДК 599.426

НЕТОПЫРЬ КУЛЯ (*PIPISTRELLUS KUHLLII* KUHL.) В РОСТОВСКОЙ ОБЛАСТИ

© 2015 В.А. Миноранский, А.В. Малиновкин

Миноранский Виктор Аркадьевич – доктор сельскохозяйственных наук, профессор, кафедра зоологии, Южный федеральный университет, ул. Б. Садовая, 105/42, г. Ростов н/Д, 344006; председатель ассоциации «Живая природа степи», ул. Тельмана, 10, г. Ростов н/Д, 344011, e-mail: eco@aanet.ru

Minoranskii Viktor Arkad'evich – Doctor of Agricultural Science, Professor, Zoology Department, Southern Federal University, B. Sadovaya St., 105/42, Rostov-on-Don, 344006, Russia; Head of the Association «Living Steppe Nature», Telman St., 10, Rostov-on-Don, 344011, Russia, e-mail: eco@aanet.ru

Малиновкин Алексей Вячеславович – аспирант, кафедра зоологии, Южный федеральный университет, пр. Стачки, 194/1, г. Ростов н/Д, 344090, e-mail: alexblaze1@mail.ru

Malinovkin Aleksei Vyacheslavovich – Post-Graduate Student, Department of Zoology, Southern Federal University, Stachki Ave., 194/1, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: alexblaze1@mail.ru

Pipistrellus kuhllii Kuhl. в Ростовской области, отмеченный впервые в 1975 г., к настоящему времени расселился по всем районам, стал одним из многочисленных оседлых синантропных видов Chiroptera. Рассмотрены причины его синантропизации и расселения. Используемые в статье данные были получены авторами в Ростовской области в период с 2009 по 2014 г. Проведена сравнительная характеристика мест обитания, размножения и зимовок нетопыря Куля. Проведен анализ по экстерьерным показателям всех пойманных особей.

Ключевые слова: *Pipistrellus kuhllii* Kuhl., Ростовская область, расселение, местообитание, Chiroptera, синантропизация.

Pipistrellus kuhllii Kuhl. in the Rostov Region marked by the first time in 1975, to date settled in all areas, has become one of the many species of synanthropic settled Chiroptera. Considers the reasons it synanthropization and resettlement. Data used in this article were obtained by the authors in the Rostov Region in the period from 2009 to 2014. Made a comparative characteristics of habitats, breeding and wintering bat Kul. As well, exterior figures were analyzed for all captured individuals.

Keywords: *Pipistrellus kuhllii* Kuhl., Rostov region, settlement, habitat, Chiroptera, synanthropization.

Впервые выводковая колония этого вида в Ростовской области (РО) отмечена в 1975 г. в Ростове н/Д [1]. До этого момента сведений о его обитании здесь не было, хотя фауна населенных пунктов изучалась довольно интенсивно. Приводимый ниже материал собран нами в период изучения рукокрылых РО с 2009 по 2014 г. путем обследования различных мест возможного обитания летучих мышей с применением многих методик наблюдения и учета, включая бет-детектор Pettersson D240X. Авторами использованы музейные коллекции и архивы Ростовского госуниверситета (РГУ), коллекции зоологического музея МГУ (ЗМУ), имеющиеся литературные данные.

После первого обнаружения нетопырь Куля, или средиземноморский нетопырь, стал интенсивно расселяться по территории РО, выходя за ее пределы. Позднее он был найден в Волгодонске, Пролетарске, Сальске, в с. Сандата Сальского района, с. Развильном Песчанокопского района [2], в станице Калининской и х. Вербовый Лог Дубовского района [3], в станицах Боковская и Кружилинская Боковского района, Казанская, в х. Пузановском Верхнедон-

ского района и других местах [4]. Нами особи этого вида встречены в населенных пунктах практически всех обследованных районов РО.

К настоящему времени нетопырь Куля на Дону является оседлым, обычным, местами самым массовым видом из рукокрылых. Обитает только в антропогенном ландшафте, его места размножения, летние и зимние убежища связаны исключительно со строениями людей, а зимовки – с отапливаемыми помещениями. Особи нетопыря Кули встречаются в городах, сельских и других населенных пунктах разных размеров. В естественных убежищах (гrotы, пещеры, ниши, трещины, подвалы, штольни, дупла и др.) нами не отмечались. Связь с водоемами и древесной растительностью проявляется только через обилие кормовых объектов. Мы их наблюдали в п. Волочаевском и других населенных пунктах юга-востока РО, где древесная растительность крайне бедная, водоемы характеризуются высокой солёностью, а пресная вода является дефицитной.

Обилие нетопырей в населенных пунктах зависит от наличия и количества в них кирпичных или па-

нелных зданий. Наибольшее количество особей мы наблюдали в г. Ростове н/Д; много – в других городах (Таганрог, Азов, Аксай, Шахты, Миллерово и др.); нередко – в сельских населенных пунктах. Активно, в течение нескольких лет после пуска в эксплуатацию, заселяют новые многоэтажные дома. Менее интенсивно используют убежища (в том числе и выводковые) в одиноких строениях в различных ландшафтах. Так, колония самок (более 40) с детенышами встречена 19.07.2003 г. на кордоне Верхнедонского лесхоза в окр. ст. Казанской [2].

В Ростове мы осмотрели более 30 убежищ нетопыря Кули. Здесь он является многочисленным оседлым видом из рукокрылых (за 2014 г. было поймано 769 особей). Встречается во всех районах города. Заселяет старые и новые многоэтажные здания, малоэтажные и одноэтажные кирпичные и панельные строения. В неотапливаемых строениях (гаражи, склады и др.) не встречался. Обычен и многочислен в районах с многоэтажными застройками как в центре (пр. Ворошиловский, Буденновский, ул. Б. Садовая, Пушкинская и т.д.), так и на периферии (ул. Левобережная, Днепропетровская, Пескова; Зеленый остров и др.) города. В центре города было поймано 533 особи, на периферии – 236. Нетопыри наиболее многочисленны в местах с крупными многоэтажными массивами. В одном строении может быть несколько зимних и летних убежищ, а общая численность достигать 400 и более особей. Убежищами являются чердаки, щели между плитами и панелями в бетонных и кирпичных зданиях, ниши между кирпичами, под карнизами, оконные рамы, вентиляционные люки, полые стены построек, другие элементы строений. Для зимовки используются глубокие полости в отапливаемых зданиях, нередко выводковые и зимние колонии располагаются в одной нише. Основным условием убежищ для зимовки является сохранение ими определённых температур в холодный период, независимо от их изменений в окружающей среде. Благодаря отоплению зданий зимой здесь сохраняется достаточная для выживания зверьков температура.

Нетопырь Куля относится к мелким рукокрылым. Для особей, обитающих в Средиземноморье и Передней Азии, длина тела 41÷48 мм, длина предплечья 31÷37 мм [5]. Показатели нетопырей, полученные нами в РО (преимущественно в г. Ростове н/Д), приведены в таблице.

На охоту они вылетают поздно – в темных сумерках, летают всю ночь над дворами, улицами, невысоко от земли. Полет быстрый, прямолинейный, обычно без резких поворотов, лишь иногда нетопыри медленно описывают круги. Охотящие-

ся особи встречаются около искусственных источников света.

Экстерьерные показатели нетопыря Куля в РО

Пол	Кол-во	Длина предплечья, мм			Масса, г		
		Средняя	Минимальная	Максимальная	Средняя	Минимальная	Максимальная
Самцы	275	34,1	31,3	36,2	7,1	5,2	9,4
Самки	494	34,6	32,1	36,8	8,2	5,6	11,2
Всего	769	34,3	31,3	36,8	8,1	5,2	11,2

В теплый период самцы и самки чаще держатся отдельно. Исключением являются гонные и зимние колонии. В выводковых колониях находится от 20 до 40 самок, реже до 100 (самцы в них не обнаружены). Так, в одном из многоэтажных домов на окраине города (Западный жилой массив) при замене окон была обнаружена выводковая колония самок, состоящая из 93 особей (включая новорожденных). С другими видами нетопырь Куля смешанных колоний не образует. В литературе [3] и наших находках отмечены лишь единичные случаи нахождения в убежищах особей этого и других видов.

В зависимости от погодных условий нетопыри впадают в спячку в октябре–ноябре, а весной вылетают в апреле. Во время оттепелей их активность повышается, и зверьков можно встретить летающими даже в зимние месяцы. В феврале 2001 г. один нетопырь регулярно в ночное время выходил из-под облицовочных материалов и летал в квартире на 4-м этаже пятиэтажного дома в Ростове. В марте при потеплении он вылетел через форточку на улицу. В суровые, затяжные и неустойчивые по погоде зимы отмечается гибель части зимующих зверьков [3].

В литературе широко обсуждаются вопросы воздействия потепления и аридизации климата на животный мир. Не исключая эти факторы, по нашему мнению, основное влияние на расселение нетопыря Кули в северном направлении и его синантропизацию в новых регионах оказывает антропогенная трансформация ландшафтов. Урбанизация и рекреационное использование природных территорий (туристические, охотничьи, спортивные и другие базы, детские лагеря, дачные участки, и т.п.) положительно влияют на проникновение вида в новые районы и его численность. Этот переднеазиатский сухо- и теплолюбивый нетопырь [6], относимый Н.К. Верещагиным к древнесредиземноморскому комплексу, исторически обитает на юге Палеарктики, в условиях субтропического климата средиземноморского типа, характерного для Средиземноморского бассейна, и аридных тер-

риторий Средней Азии, где предпочитает ландшафты низких безлесных плоскогорий, предгорий и жарких низменностей [7, 8]. До середины XX в. был распространен в Южной Европе, Передней, Малой и Средней Азии, Иране, Афганистане, Синде, Кашмире, Северной, Восточной и Южной Африке, а на территории бывшего СССР – в Крыму (находки до 1912 г.), Закавказье, в низовьях р. Аму-Дарьи и в окр. Аральска [5]. А.К. Темботов приводит этот вид для восточной части Закавказья и низовьев р. Самуры [9].

Одним из важных факторов в распространении нетопыря Куля являются низкие температуры в холодный период года. В пределах его современного ареала можно найти полный переход от простого снижения активности в зимнее время в субтропической Аравии [10], где температура в холодный период не бывает ниже $+5 \div +10$ °С, до зимней спячки в холодное время, продолжающегося в условиях Юга России до 5–6 месяцев.

В 60-е гг. Н.К. Верещагин отметил интенсивный рост численности средиземноморского нетопыря в Закавказье, который, по его наблюдениям, начался в 40-е гг. [7]. Первые находки особей этого вида на Северном Кавказе отмечены в 1975, 1977 г. [1]. Во второй половине XX в. началось интенсивное расселение данного вида в северном направлении. К 90-м гг. он широко обитал в Краснодарском и Ставропольском краях, Ростовской, Астраханской, Волгоградской, Саратовской, Гурьевской и Уральской областях, Республике Калмыкия [3]. Здесь зафиксированы лишь единичные случаи нахождения отдельных нетопырей в естественных укрытиях под корой деревьев, что, вероятно, связано со случайным залетом и временным использованием убежищ. К настоящему времени этот вид широко расселился в Крыму, южных областях Украины, проникнув до Киева [11], отмечен в Молдове [12], Белгородской [13], Тамбовской [14], Московской [15] и Пензенской [16] областях, Магнитогорске в Зауралье [17]. За короткий срок нетопырь Куля не только широко распространился на Кавказе, в пустынной (в Астраханской области), степной и лесостепной зонах, но и стал в ряде регионов многочисленным видом рукокрылых [18].

Расселению и распространению нетопыря Куля далеко на север в последние 40–50 лет способствовали формирование синантропных группировок в историческом ареале и активное строительство многоэтажных отапливаемых сооружений к северу от этого ареала. Данное строительство активно происходило в 60 – 80-е гг. XX в., в последние 10-летия. В эти годы проходило интенсивное рекреационное освоение побережий Черного и Каспийского морей, строительство многоэтажных курорт-

ных, жилищных, промышленных и другого назначения в районах современного распространения нетопыря Куля. Расселяющаяся на север синантропная группировка продолжала адаптироваться к условиям более северных районов. Нахождение мертвых особей в продолжительные холодные зимы с периодическими оттепелями в неотапливаемых строениях не только связано с климатическими факторами, но и свидетельствует о сложности данного процесса.

Литература

1. Ярмыш Н.Н., Казаков Б.А., Сониная И.Ю., Усвайская А.А. Новые находки рукокрылых на Северном Кавказе // Рукокрылые (Chiroptera). М., 1980. С. 72–77.
2. Бахтадзе Г.Б., Анистратов Д.Н., Журавец Т.В. Рукокрылые севера Ростовской области // Флора, фауна и микобиота государственного музея-заповедника М.А. Шолохова. Вешенская, 2004. С. 191–193.
3. Стрелков П.П., Ильин В.Ю. Рукокрылые (Chiroptera, Vespertilionidae) юга Среднего и Нижнего Поволжья // Тр. Зоол. ин-та АН СССР. 1990. Т. 225. С. 42–167.
4. Газарян С.В., Бахтадзе Г.Б., Малиновкин А.В. Современное состояние изученности рукокрылых Ростовской области // Plecotus et al. 2010. Т. 13. С. 50–58.
5. Громов И.М., Гуреев А.А., Новиков Г.А., Соколов И.И., Стрелков П.П., Чапский К.К. Млекопитающие фауны СССР. Ч. 1. М.:Л., 1963. 640 с.
6. Рахматулина И.К. Зоогеографическая характеристика фауны рукокрылых Азербайджана // Рукокрылые : материалы 5 Всесоюз. совещ. по рукокрылым. Пенза, 1990. С. 53–57.
7. Верещагин Н.К. Млекопитающие Кавказа. М; Л., 1959. 703 с.
8. Стрелков П.П., Ункурова В.И., Медведева Г.А. Новые данные о нетопыре Куля (*Pipistrellus kuhlii* Kuhl) и динамике его ареала в СССР // Зоол. журн. 1985. Т. 64, № 1. С. 87–97.
9. Темботов А.К. География млекопитающих Северного Кавказа. Нальчик, 1972. 245 с.
10. Harrison D.L. The Mammals of Arabia. 1964. Vol. 1. 192 p.
11. Годлевская Е.В. Результаты работы контактного центра по рукокрылым (Украина) // Уч. зап. 1918. С. 12.
12. Бондаренко А.М. Фауна рукокрылых Кицканского леса (Молдова, Приднестровье) // Plecotus et al. 2006. Т. 9. С. 18–24.
13. Влащенко А.С., Лукасова А.С., Шаповалов А.С. Материалы по фауне и экологии рукокрылых (Chiroptera) Белгородской области // Вестн. СПб ун-та. 2012. Сер. 3, вып. 3. С. 3–11.

14. Лада Г.А. Находка нетопыря Куля (*Pipistrellus kuhlii*) в Тамбовской области // Зоол. журн. 2010. Т. 89, № 7. С. 888–890.

15. Альбов С.А., Крусков С.В., Росина В.В. Рукокрылые (*Chiroptera*) Приокско-Террасного заповедника – тридцать лет спустя // *Plecotus et al.* 2009. Т. 11, № 12. С. 24–31.

16. Золина Н.Ф., Ильин В.Ю., Смирнов Д.Г., Шепелев А.А. Рукокрылые г. Пензы и его окрестностей // Поволж. экол. журн. 2007. № 2. С. 116 – 123.

17. Снитко В.П. Новые данные по распространению рукокрылых в Зауралье (Челябинская область) // *Plecotus et al.* 2010. Т. 13. С. 38–41.

18. Смирнов Д.Г., Вехник В.П. О современном распространении *Pipistrellus kuhlii* (*Chiroptera: Vespertilionidae*) в Поволжье // Поволж. экол. журн. 2011. № 2. С. 193 – 202.

References

1. Yarmysh N.N., Kazakov B.A., Sonina I.Yu., Usvaiskaya A.A. Novye nakhodki rukokrylykh na Severnom Kavkaze [New finds of bats in the Northern Caucasus]. *Rukokrylye (Chiroptera)*. Moscow, 1980, pp. 72-77.

2. Bakhtadze G.B., Anistratov D.N., Zhuravets T.V. Rukokrylye severa Rostovskoi oblasti [Bats of north of Rostov Region]. *Flora, fauna i mikrobiota gosudarstvennogo muzeya-zapovednika M.A. Sholokhova*. Veshenskaya, 2004, pp. 191-193.

3. Strelkov P.P., Il'in V.Yu. Rukokrylye (*Chiroptera, Vespertilionidae*) yuga Srednego i Nizhnego Povolzh'ya [Bats (*Chiroptera, Vespertilionidae*) of south of Middle and Lower Volga]. *Trudy Zoologicheskogo instituta AN SSSR*, 1990, vol. 225, pp. 42-167.

4. Gazaryan S.V., Bakhtadze G.B., Malinovkin A.V. Sovremennoe sostoyanie izuchennosti rukokrylykh Rostovskoi oblasti [The current state of knowledge of bats in Rostov Region]. *Plecotus et al.*, 2010, no 13, pp. 50-58.

5. Gromov I.M., Gureev A.A., Novikov G.A., Sokolov I.I., Strelkov P.P., Chapskii K.K. *Mlekopitayushchie fauny SSSR* [Mammals of the USSR]. Vol. 1. Moscow; Leningrad, 1963, 640 p.

6. Rakhmatulina I.K. [Zoogeographical characteristic fauna of bats in Azerbaijan]. *Rukokrylye* [Bats]. Articles 5 All-Union Conference on bats. Penza, 1990, pp. 53-57.

7. Vereshchagin N.K. *Mlekopitayushchie Kavkaza* [Mammals of the Caucasus]. Moscow; Leningrad, 1959, 703 p.

8. Strelkov P.P., Unkurova V.I., Medvedeva G.A. Novye dannye o netopyre Kulya (*Pipistrellus kuhlii*) i dinamike ego areala v SSSR. *Zoologicheskii zhurnal*, 1985, vol. 64, no 1, pp. 87-97.

9. Tembotov A.K. *Geografiya mlekopitayushchikh Severnogo Kavkaza* [Geography mammals of the North Caucasus]. Nalchik, 1972, 245 p.

10. Harrison D.L. *The Mammals of Arabia*. London, 1964, Vol. 1, 192 p.

11. Godlevskaya E.V. Rezul'taty raboty kontakt-tsentra po rukokrylym (Ukraina) [Results of the contact center on bats (Ukraine)]. *Uchenye zapiski*, 1918, p. 12.

12. Bondarenko A.M. Fauna rukokrylykh Kitskansko-go lesa (Moldova, Pridnestrov'e) [Kitskany bat fauna of the forest (Moldova, Transnistria)]. *Plecotus et al.*, 2006, vol. 9, pp. 18-24.

13. Vlashchenko A.S., Gukasova A.S., Shapovalov A.S. Materialy po faune i ekologii rukokrylykh (*Chiroptera*) Belgorodskoi oblasti [Materials on fauna and ecology of bats (*Chiroptera*) of the Belgorod Region]. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta*, 2012, ser. 3, vol. 3, pp. 3-11.

14. Lada G.A. Nakhodka netopyrya Kulya (*Pipistrellus kuhlii*) v Tambovskoi oblasti [Finding cool bat (*Pipistrellus kuhlii*) in the Tambov Region]. *Zoologicheskii zhurnal*, 2010, vol. 89, no 7, pp. 888-890.

15. Al'bov S.A., Kruskov S.V., Rosina V.V. Rukokrylye (*Chiroptera*) Prioksko-Terrasnogo zapovednika – tridsat' let spustya [Bats (*Chiroptera*) of Oka Terrasny Reserve - thirty years later]. *Plecotus et al.*, 2009, vol. 11, no 12, pp. 24-31.

16. Zolina N.F., Il'in V.Yu., Smirnov D.G., Shepelev A.A. Rukokrylye g. Penzy i ego okrestnostei [Bats of the Penza and the surrounding area]. *Povolzhskii ekologicheskii zhurnal*, 2007, no 2, pp. 116-123.

17. Snit'ko V.P. Novye dannye po rasprostraneniyu rukokrylykh v Zaural'e (Chelyabinskaya oblast') [New data on the distribution of bats in the Urals (Chelyabinsk Region)]. *Plecotus et al.*, 2010, vol. 13, pp. 38-41.

18. Smirnov D.G., Vekhnik V.P. O sovremennom rasprostraneni Pipistrellus kuhlii (*Chiroptera: Vespertilionidae*) v Povolzh'e [On the current distributing *Pipistrellus kuhlii* (*Chiroptera: Vespertilionidae*) in the Volga Region]. *Povolzhskii ekologicheskii zhurnal*, 2011, no (2), pp. 193-202.

УДК 636.2:591.111.3

ОЦЕНКА СОСТОЯНИЯ СИСТЕМЫ ГЕМОСТАЗА У КОРОВ ПРИ КЛИНИЧЕСКОЙ ФОРМЕ МАСТИТА

© 2015 г. Ю.Л. Ошуркова, Е.Н. Соболева

Ошуркова Юлия Леонидовна – кандидат биологических наук, доцент, кафедра анатомии и физиологии, Вологодская государственная молочнохозяйственная академия имени Н.В. Верещагина, ул. Шмидта, 2, г. Вологда, 160555, e-mail: yul.oshurkova@yandex.ru

Oshurkova Yuliya Leonidovna – Candidate of Biological Science, Associate Professor, Department of Anatomy and Physiology, Vereshchagin Vologda State Dairy Farming Academy, Shmidt St., 2, Vologda, 160555, Russia, e-mail: yul.oshurkova@yandex.ru

Соболева Елена Николаевна – ведущий ветеринарный врач, кафедра анатомии и физиологии, Вологодская государственная молочнохозяйственная академия имени Н.В. Верещагина, ул. Шмидта, 2, г. Вологда, 160555, e-mail: ensobol@yandex.ru

Soboleva Elena Nikolaevna – Leading Veterinarian, Department of Anatomy and Physiology, Vereshchagin Vologda State Dairy Farming Academy, Shmidt St., 2, Vologda, 160555, Russia, e-mail: ensobol@yandex.ru

Изучалось функционирование системы гемостаза у лактирующих коров при клинической форме мастита. Для диагностики применялся метод тромбозластографии, позволяющий за один тест оценить все звенья свертывающей системы крови. Описан принцип работы тромбозластографа TEG5000. В результате исследования установлено, что при воспалении молочной железы у лактирующих коров наблюдается выраженная активация системы гемостаза.

Ключевые слова: гемостаз, тромбозластограмма, коровы, мастит, сгусток, фибрин.

The work on the hemostasis system functioning study in lactating cows under the clinical mastitis form has been performed. Tromboelastography method allowing estimate all the parts of blood clotting system per one test has been used for diagnosis. The concept of tromboelastography TEG5000 work has been described. The result determines that under the mammary gland inflammation in lactating cows a marked activation of hemocoagulation system has been observed.

Keywords: haemostasis, thromboelastogramma, cows, mastitis, clot, fibrin.

Изучалось функционирование системы гемостаза у лактирующих коров при клинической форме мастита. Для диагностики применялся метод тромбозластографии, позволяющий за один тест оценить все звенья свертывающей системы крови. Описан принцип работы тромбозластографа TEG5000. Установлено, что при воспалении молочной железы у лактирующих коров наблюдается выраженная активация системы гемостаза.

В настоящее время не вызывает сомнений, что морфофункциональные особенности лактационного периода у коров во многом зависят от интенсивности кровоснабжения вымени. Для образования 1 л молока необходимо, чтобы через вымя прошло 400 – 500 л крови. Особенности кровоснабжения молочной железы у коров посвящено довольно много работ [1–3]. Но данные о функционировании системы гемостаза у коров в период лактации немногочисленны и неполны. От этой системы в значительной степени зависит уровень доставки необходимого количества кислорода и питательных веществ, необходимых для образования молока.

Во время лактации организм коров испытывает сильное физиологическое напряжение, что может привести к снижению сопротивляемости к неблагоприятным условиям внешней среды и возникновению различных заболеваний, которые могут вызывать избыточную активацию системы гемостаза в сторону увеличения тромбообразования [3, 4].

Для комплексной оценки функционирования системы гемостаза, как дополнение к традиционным методам, многие авторы рекомендуют применять метод тромбозластографии [5–7]. Большинство научных работ посвящено использованию этого метода для исследования функционирования системы гемостаза у собак, кошек и лошадей [5, 8, 9]. Применению метода тромбозластографии у крупного рогатого скота в норме и при патологии, к сожалению, не уделялось должного внимания.

Поэтому целью нашего исследования было изучение функционирования системы гемостаза у лактирующих коров при клинической форме мастита методом тромбозластографии (ТЭГ).

Материал и методы

Исследования проводились на коровах айрширской породы молочно-товарного комплекса «Майский» СХПК «Племзавод Майский» Вологодского района. В ходе опыта все животные находились в одинаковых условиях содержания и кормления, которые существенно не менялись в течение опыта.

По результатам диспансеризации были созданы две опытные группы животных, находящиеся на 4 – 5-м месяце лактации. В первую группу вошли клинически здоровые животные ($n=10$), во вторую – больные клиническим маститом ($n=30$).

Кровь для исследования брали из яремной вены с использованием вакуумных систем для взятия венозной крови в пробирки с 3,8%-м раствором цитрата натрия. Исследование взятых образцов крови проводили на анализаторе TEG®5000.

Анализатор измеряет физические свойства сгустка крови, используя для этого специальную цилиндрическую чашечку, в которую помещается образец крови. Чашечка совершает вращательные движения относительно своей оси на угол $4^\circ 45'$. Каждый вращательный цикл длится 10 с. Стержень, погруженный в образец крови, был подвешен на скручивающейся нити. Крутящий момент вращающейся чашечки передается на погруженный в образец стержень только после того, как образующийся за счет фибрино-тромбоцитарных связей сгусток начинает соединять чашечку и стержень вместе. Сила этих связей определяет угол поворота стержня: несвернувшаяся кровь не передает вращение, рыхлый сгусток лишь частично передает вращение, а прочный сгусток заставляет стержень двигаться синхронно с чашечкой.

Как только сгусток начинает сжиматься или разрушаться, связи рвутся, взаимодействие между чашечкой и стержнем ослабевает и передача движения чашечки на стержень уменьшается. Вращательные движения стержня фиксируются компьютером и записывается кривая – тромбоэластограмма (рис. 1) [10].

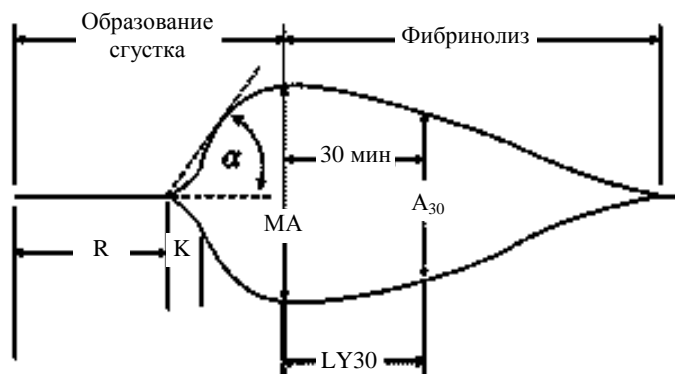


Рис. 1. Графическое изображение тромбоэластограммы

При интерпретации полученных данных мы оценивали пять основных параметров образования сгустка и его лизиса: R – время реакции, которое отражает скорость образования тромбопластина и соответствует первой невидимой фазе свертывания крови, мин; K – время коагуляции, необходимое для достижения максимальной плотности сгустка, мин; α – угловая константа, измеряет скорость образования прочного фибринового сгустка (процесс уплотнения или степень прочности формирования сгустка), градусы; MA – максимальная амплитуда, отражает физические качества сгустка и соответствует III фазе свертывания крови, мм. Величина MA соответствует концу продуктивной фазы свертывания, после которой начинается ретракция сгустка и фибринолиз, отражает свертывающую активность тромбоцитов и фибриногена; LY 30 – индекс фибринолиза, т.е. процент, на который уменьшается величина (амплитуда) сгустка в течение 30 мин после достижения MA.

Результаты, полученные в ходе исследований, обрабатывали с помощью программы Microsoft Excel. Значения полученных результатов представлены в виде $M \pm m$, где M – средняя величина; m – стандартная ошибка средней. Сравнение между собой данных проводилось с применением t-критерия Стьюдента [11, 12].

Результаты исследований и обсуждение

Большая информативность метода ТЭГ позволила нам получить данные, которые характеризуют не только процесс свертывания крови в целом, но и отдельные его фазы. Изменения в системе гемостаза мы определяли при сравнении показателей тромбоэластограммы опытной и контрольной групп животных (рис. 2).

При анализе результатов полученных тромбоэластограмм у больных клиническим маститом коров наблюдали ускорение времени начала формирования нитей фибрина (R) ($p \leq 0,05$). У здоровых коров время R составило $23,37 \pm 2,49$ мин, у больных – $15,5 \pm 1,07$.

Расхождение ветвей ТЭГ на 20 мм от начала формирования нитей фибрина у больных маститом коров происходило за $8,04 \pm 0,94$ мин. Это быстрее, чем у животных контрольной группы на 32,2 % ($K = 11,86 \pm 3,2$ мин).

Скорость роста фибриновой сети повышена у коров с клиническими признаками мастита, на что указывает увеличение показателя α . Показатель MA у больных животных, который характеризует механическую плотность образовавшегося сгустка,

был достоверно ($p \geq 0,05$) выше, чем у здоровых животных, и составил $83,57 \pm 0,67$ мм.

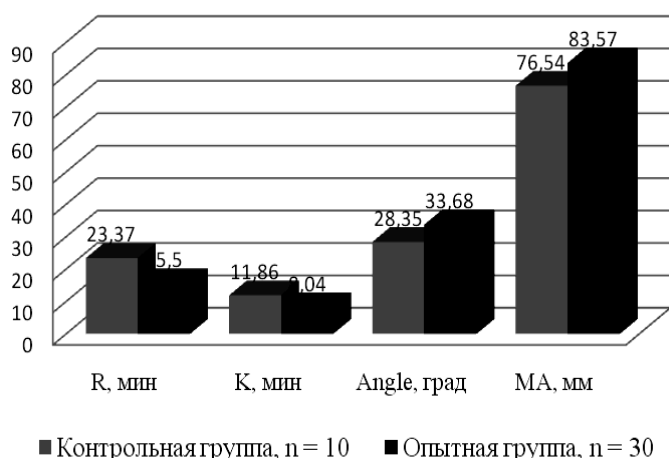


Рис. 2. Показатели тромбоэластограммы у здоровых коров и больных клинической формой мастита

Индекс фибринолиза (LY30), регистрирующий-ся через 30 мин после достижения кривой тромбоэластограммы максимальной амплитуды и характеризующий процесс растворения сгустка, у больных коров был равен 0 %, тогда как у здоровых животных достигал $0,06 \pm 0,05$ %.

Из анализа полученных данных следует, что при клинических формах мастита у коров отмечается выраженная активация системы гемостаза. В этот период в организме развивается состояние гиперкоагуляции, наблюдается ухудшение реологических свойств крови.

Выводы

Изменение интенсивности непрерывно протекающего свертывания крови сопровождается большинством физиологических и патологических состояний организма, вызываемых реакцией напряжения. Не является исключением в этом смысле и период лактации у молочных коров.

В середине лактационного периода у здоровых коров наблюдается усиление фибринолиза, что обеспечивает оптимальные реологические свойства крови и эффективное кровоснабжение всех органов. Именно в этот период удои достигают своего максимума [4].

При воспалении молочной железы у коров наблюдаются изменения в системе гемостаза, ведущие к повышенному тромбообразованию. Исследование системы гемостаза при помощи метода тромбоэластографии позволяет быстро оценить состояние как плазменного, так и тромбоцитарного звеньев свертывающей системы крови и своевременно назначить обоснованную патогенетическую терапию.

Литература

1. Акопян К.А. Изменчивость общего количества крови и ее составных частей в течение лактации // Успехи зоотех. науки. 1937. Т. 3. С. 53–55.
2. Билозор Р.В. Артериальная васкуляризация вымени крупного рогатого скота в связи с молочной продуктивностью: автореф. дис. ... канд. биол. наук, Львов, 1958. 19 с.
3. Рыбаков А.В. Артериальное русло молочной железы крупного рогатого скота костромской породы в постнатальном онтогенезе: автореф. дис. ... канд. вет. наук. Кострома, 2004. 138 с.
4. Ошуркова Ю.Л., Соболева Е.Н., Власов И.А. Анализ состояния системы гемостаза у коров в разные периоды лактации // Вестн. ветеринарии. 2012. № 63 (4). С. 91 – 93.
5. Martini W.Z., Cortez D.S., Dubick M.A., Park M.S., Holcomb J.B. Thromboelastography is better than PT, aPTT, and activated clotting time in detecting clinically relevant clotting abnormalities after hypothermia, hemorrhagic shock and resuscitation in pigs // J. Trauma. 2008. Vol. 65, № 3. P. 35–43.
6. Kol A., Borjesson D.L. Application of thromboelastography / thromboelastometry to veterinary medicine // Vet. Clin. Pathol. 2010. Vol. 39, № 4. P. 405 – 416.
7. Wiinberg B., Kristensen A.T. Thromboelastography in veterinary medicine // Seminars in Thrombosis and hemostasis. 2010. Vol. 36, № 7. P. 747 – 756.
8. Epstein K.L., Brainard B.M., Lopes M.A., Barton M.H., Moore J.N. Thromboelastography in 26 healthy horses with and without activation by recombinant human tissue factor // J. Vet. Emerg. Crit Care (San Antonio). 2009. Vol. 19, № 1. P. 96 – 101.
9. Marschner C.B., Kristensen A.T., Wiinberg B. Thromboelastography results on citrated whole blood from clinically healthy cats depend on modes of activation // Acta Veterinaria Scandinavica. 2010. Vol. 52. P. 38 – 42.
10. Тромбоэластограф TEG 5000. URL: http://bondaroksana.ucoz.ru/publ/klinicheskaja_laboratornaja_diagnostics/biokhimija/tromboehlastograf_teg_5000_issledovanie_sistemy_gemostaza/3-1-0-13 (дата обращения: 20.11.2013).
11. Биометрическая обработка лабораторных, клинических и эпизоотологических данных : метод. руководство. Новочеркасск, 1980. 40 с.
12. Лапач С.Н., Чубенко А.В., Бабич П.Н. Статистические методы в медико-биологических исследованиях с использованием Excel: 2-е изд., перераб. и доп. К., 2001. 408 с.

References

1. Akopyan K.A. Izmenchivost' obshchego kolichestva krovi i ee sostavnykh chastei v techenie laktatsii

[Variability of the total amount of blood and its components during lactation]. *Uspekhi zootekhnicheskoi nauki*, 1937, vol. 3, pp. 53-55.

2. Bilozor R.V. *Arterial'naya vaskulyarizatsiya vy-meni krupnogo rogatogo skota v svyazi s molochnoi produktivnost'yu* [Arterial vascularization of the udder in cattle in connection with dairy efficiency]: avtoref. dis. ... kand. biol. nauk. L'vov, 1958, 19 p.

3. Rybakov A.V. *Arterial'noe ruslo molochnoi zhelezy krupnogo rogatogo skota kostromskoi porody v postnatal'nom ontogeneze* [Arterial channel of a mammary gland of cattle of Kostroma breed in a postnatal ontogenesis]: avtoref. dis. ... kand. vet. nauk. Kostroma, 2004, 138 p.

4. Oshurkova Yu.L., Soboleva E.N., Vlasov I.A. *Analiz sostoyaniya sistemy gemostaza u korov v raznye periody laktatsii* [Analysis of the hemostatic system in cows in different periods of lactation]. *Vestnik veterinarii*, 2012, no 63(4), pp. 91-93.

5. Martini W.Z., Cortez D.S., Dubick M.A., Park M.S., Holcomb J.B. Thromboelastography is better than PT, aPTT, and activated clotting time in detecting clinically relevant clotting abnormalities after hypothermia, hemorrhagic shock and resuscitation in pigs. *J. Trauma.*, 2008, vol. 65, no 3, pp. 35-43.

6. Kol A., Borjesson D.L. Application of thrombelastography/thromboelastometry to veterinary medicine. *Vet. Clin. Path.*, vol. 39, no 4, pp. 405-416.

7. Wiinberg B, Kristensen A.T. Thromboelastography in veterinary medicine. *Seminars in Thrombosis and Hemostasis*, 2010, vol. 36, no. 7, pp. 747-756

8. Epstein K.L., Brainard B.M., Lopes M.A., Barton M.H., Moore J.N. Thrombelastography in 26 healthy horses with and without activation by recombinant human tissue factor. *J. Vet. Emerg. Crit. Care.*, 2009, vol. 19, no 1, pp. 96-101.

9. Marschner C.B., Kristensen A.T., Wiinberg B. Thromboelastography results on citrated whole blood from clinically healthy cats depend on modes of activation. *Acta Veterinaria Scandinavica*, 2010, vol. 52, pp. 38-42.

10. *Tromboelastograf TEG 5000* [Thromboelastograph TEG 5000]. Available at: http://bondaroksana.ucoz.ru/publ/klinicheskaja_laboratornaja_diagnostika/biokhimiya/tromboelastograf_teg_5000_issledovanie_sistemy_gemostaza/3-1-0-13 (accessed 20.11.2013).

11. *Biometricheskaya obrabotka laboratornykh, klinicheskikh i epizootologicheskikh dannykh* [Biometric processing of laboratory, clinical and epizootic data]. Novocherkassk, 1980, 39 p.

12. Lapach S.N., Chubenko A.V., Babich P.N. *Statisticheskie metody v mediko-biologicheskikh issledovaniyakh s ispol'zovaniem Excel* [Statistical methods in biomedical research using Excel]. Kyiv, 2001, 408 p.

НАУКИ О ЗЕМЛЕ

УДК 504.455:504.4.054

СОВРЕМЕННЫЙ УРОВЕНЬ СОЛЕВОГО ЗАГРЯЗНЕНИЯ ПРОЛЕТАРСКОГО И ВЕСЕЛОВСКОГО ВОДОХРАНИЛИЩ

© 2015 г. Е.В. Коханистая, Т.А. Хоружая

Коханистая Екатерина Валерьевна – аспирант, институт наук о Земле Южного федерального университета, ул. Зорге, 40, г. Ростов н/Д, 344090, e-mail: koxanistaya@bk.ru

Kokhanistaya Ekaterina Valer'evna – Post-Graduate Student, Sciences Institute about the Earth of the Southern Federal University, Zorge St., 40, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: koxanistaya@bk.ru

Хоружая Татьяна Алексеевна – доктор биологических наук, профессор, главный научный сотрудник, Гидрохимический институт, институт водных проблем РАН, южный отдел, пр. Стачки 98, г. Ростов- н/Д, 344090, e-mail: khorugajat@mail.ru

Khoruzhaya Tatiana Alekseevna – Doctor of Biological Science, Professor, Main Researcher, Hydrochemical Institute, Institute of Water Problems of the RAS, Southern Department, Stachki Ave., 198, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: khorugajat@mail.ru

В результате анализа многолетней информации Росгидромета, включая современный период (2001–2013 гг.), установлено, что в Пролетарском и Веселовском водохранилищах в число характерных загрязняющих веществ входят соединения магния, сульфаты и хлориды, которые ежегодно встречаются в 50 % и более проб воды. При этом концентрации их значительно превышают рыбохозяйственные ПДК, достигая уровня высокого и экстремально высокого загрязнения, и обуславливают повышенную минерализацию. Наибольшие величины содержания солей и минерализации в настоящее время наблюдаются в восточном отсеке Пролетарского водохранилища, что связано с природными особенностями территории его расположения. По общему уровню загрязнения, куда солевое загрязнение вносит существенный вклад, воды оценены как грязные и даже очень грязные с преобладающей тенденцией роста загрязнения в большинстве створов водохранилищ.

Ключевые слова: Пролетарское и Веселовское водохранилища, солевой состав вод, минерализация, загрязненность.

Characteristic pollutants of water in Proletarian and Veselovski Reservoirs are magnesium, sulfates and chlorides which annually meet in 50% and more water samples due to analysis of long-term information of Roshydromet, including the modern period (2001-2013). Thus their concentrations considerably exceed maximum permissible concentration, reach the level of high and extremely high pollution, and cause high level of mineralization. The highest quantity of salts and level of mineralization are observed in the Proletarsk reservoir now. It can be explained by natural particularities of the territory. Total water pollution is estimated as dirty and even very dirty with tendency of growth of pollution in the majority of sections of reservoirs. Salt pollution predominates in total water pollution.

Keywords: Proletarian and Veselovski Reservoirs, salt composition of waters, mineralization, pollution.

Пролетарское и Весёловское водохранилища построены на реке Западный Маныч в 1932–1936 гг. [1, 2]. На базе этих антропогенно-трансформированных водоёмов был в той или иной мере решен целый ряд проблем гидроэнергетики и водного транспорта, питьевого, коммунального и промышленного водоснабжения, сельскохозяйственной и рыбохозяйственной отраслей, рекреации Ставропольского и Краснодарского краев, Калмыкии и Ростовской области.

Одной из главных задач этих водохранилищ является удовлетворение нужд водопользователей в воде надлежащего качества, в том числе соответствующей требованиям по загрязненности, химическому составу и минерализации. Повышенная минерализация воды является актуальной проблемой для этих водохранилищ с момента создания [3–5], однако публикаций об уровне их солевого загрязнения и изменениях минерализации за многолетний период, включая последние десятилетия, мы не встретили в доступной литературе. В этой связи в

настоящей работе представлены результаты анализа солевого загрязнения Пролетарского и Веселовского водохранилищ, влияние его на качество воды в современный период и тенденции многолетних изменений.

Общий уровень загрязненности водохранилищ в значительной степени обусловлен соевым загрязнением. При этом следует отметить, что некоторые главные ионы отнесены к характерным загрязняющим веществам Пролетарского и Веселовского водохранилищ. В мониторинге Росгидромета термин «характерные загрязняющие вещества» используется для обозначения веществ, у которых повторяемость концентраций, превышающих ПДК, составляет более 50 % в год [6]. Как показывает анализ, к характерным загрязняющим веществам Пролетарского водохранилища в последнее десятилетие относят соединения магния, хлориды и сульфаты [7]. Содержание таких загрязняющих веществ, как соединения магния и хлориды, в створах превышает ПДК в 11–48 раз, достигая уровня высокого загрязнения (ВЗ) (4-го класса опасности). Содержание сульфатов в створе п. Правый Остров (рис. 1а) также достигало уровня ВЗ, а иногда и экстремально высокого загрязнения (ЭВЗ) с превышением концентраций более чем в 50 раз; в створе с. Маныч-Грузское (рис. 1б) содержание сульфатов в каждом году наблюдений соответствовало уровню ЭВЗ [8]. Исключением был створ Пролетарский гидроузел, где хлориды не относились к характерным загрязняющим веществам, а содержание других веществ было гораздо ниже. Содержание сульфатов было высоким, но не достигало уровня ВЗ (8,1–10,3 ПДК). Содержание магния не превышало ПДК более чем в 3 раза.

В створах Веселовского водохранилища, как и в створе Пролетарский гидроузел, характерными загрязняющими веществами были соединения магния и сульфаты. Содержание сульфатов в некоторые годы достигало уровня ВЗ, например, с 2006 по 2008 г. и в 2011 г. в створе х. Валуийский (рис. 2). Содержание магния не превышало ПДК более чем в 4 раза.

Следствием солевого загрязнения является повышенный уровень минерализации. В настоящее время общий уровень минерализации воды в водохранилищах остается различным. В 2013 г. в двух створах Пролетарского водохранилища минерализация была очень высока: в створе п. Правый Остров – $19,2 \text{ г/дм}^3$ и в створе с. Маныч-Грузское – $16,9 \text{ г/дм}^3$. В многолетнем плане в этих створах не прослеживалось четкой закономерности в изменении минерализации. Однако можно сказать, что по годам изменения её уровней происходили однообразно, только менялись в разных диапазонах: от 13,6 до $22,2 \text{ г/дм}^3$ в створе п. Правый Остров и от 16,9 до $37,5 \text{ г/дм}^3$ в створе с. Маныч-Грузское.

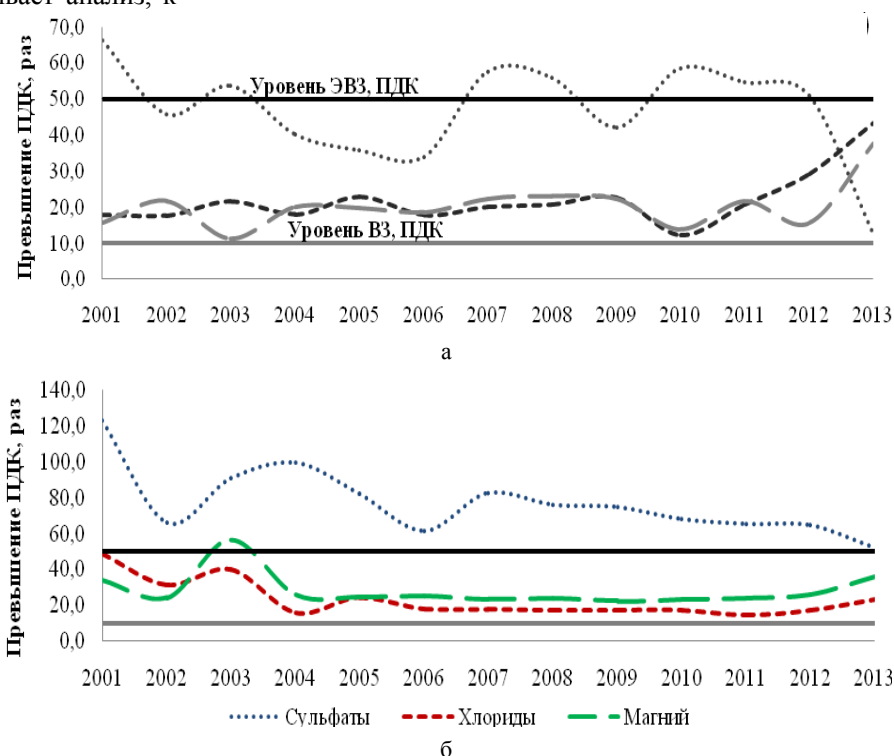


Рис. 1. Динамика изменений содержания характерных загрязняющих веществ в створах восточного отсека Пролетарского водохранилища: а – п. Правый Остров; б – с. Маныч-Грузское (2001–2013 гг.)

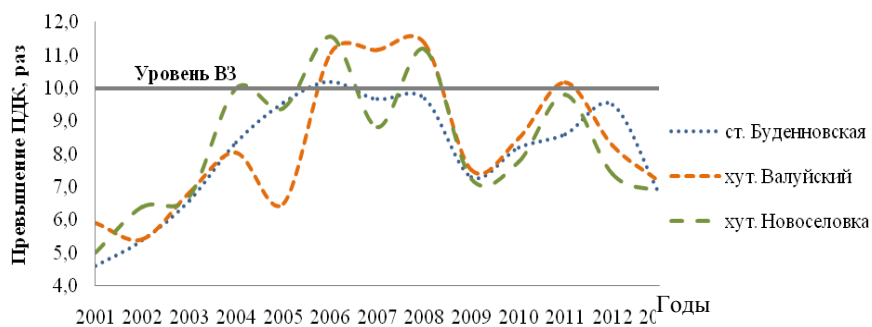


Рис. 2. Содержание сульфатов в воде створов Веселовского водохранилища в 2001–2013 гг.

В створе Пролетарский гидроузел уровень минерализации был значительно ниже и в 2013 г. составлял $1,7 \text{ г/дм}^3$. Определенной закономерности во временных изменениях минерализации также невозможно выявить, так как она изменялась скачкообразно в небольшом диапазоне ($1,2 - 2,4 \text{ г/дм}^3$).

В Веселовском водохранилище в 2013 г. её общий уровень по створам колебался в пределах $1,6 - 1,7 \text{ г/дм}^3$. В течение периода исследования во всех створах хорошо прослеживается следующая тенденция: с 2001 г. происходит постепенное увеличение минерализации. Далее в 2006–2008 гг. уровень последней достигает пика; самое большое значение отмечено в створе х. Валуевский ($2,2 \text{ г/дм}^3$), затем наблюдается уменьшение до уровня 2013 г.

По уровню минерализации оба водохранилища относятся к солоноватым [7]), что в значительной степени объясняется природными особенностями данной территории. Источником накопления солей в обоих водохранилищах являются засоленные донные отложения р. Западный Маныч. Соли солончаков и солончаковых почв смываются дождями и талыми водами в водохранилища.

Наибольшая минерализация наблюдается в Пролетарском водохранилище, которое создано на р. Западный Маныч: от верховья реки до Пролетарской плотины и включает в себя Большой Лиман с оз. Маныч-Гудило в центре [2]. До возникновения водохранилища вода лиманов и озер, расположенных на берегах р. Западный Маныч и вдоль его русла (оз. Маныч-Гудило), под действием испарения в маловодные годы постепенно превращалась в рапу, а затем высохла. Дно водоемов, образованное синей глиной, покрывалось кристаллами соли, в результате чего вода реки даже в большие паводки отличалась высоким содержанием солей, увеличи-

вающимся с продвижением на восток, а затем вновь несколько распресняющемся под воздействием весенних вод р. Калаус [4].

Пролетарское водохранилище разделено Ново-Манычской дамбой на два отсека: западный (включающий створ Пролетарский гидроузел) и восточный (включающий створы п. Правый Остров и с. Маныч-Грузское) (рис. 3), которые имеют разный гидрохимический режим. Восточный отсек является наиболее минерализованным потому, что опресненные воды реки Большого Егорлыка растворяются в воде оз. Маныч-Гудило, а небольшие по объему воды р. Калаус, по мнению [4], не достигают этого участка вследствие сильного испарения в восточной части водоема. Западный отсек водохранилища сформировался как самостоятельный район после постройки дамбы в 1933 г. Он является проточным вследствие поступления в него воды из р. Большой Егорлык и последующего сброса в Веселовское водохранилище [1], которое находится ниже по течению р. Западный Маныч и охватывает участок от Пролетарской плотины до плотины в районе п. Веселого, включая прилегающую озёрную систему. При наполнении водохранилища поступающая масса пресной воды в первую очередь заливала пониженные участки, смывая с поверхности большое количество солей. Этот процесс определил высокие значения минерализации в первые годы [5].

Мелководность и сглаженность рельефа дна водохранилищ, многолетние изменения водности и погодных условий определяют особенности гидрологической ситуации, играющей важную роль в формировании химического состава вод. Требования водопользователей к химическому составу и минерализации Пролетарского и Веселовского водохранилищ привели к необходимости их опреснения.

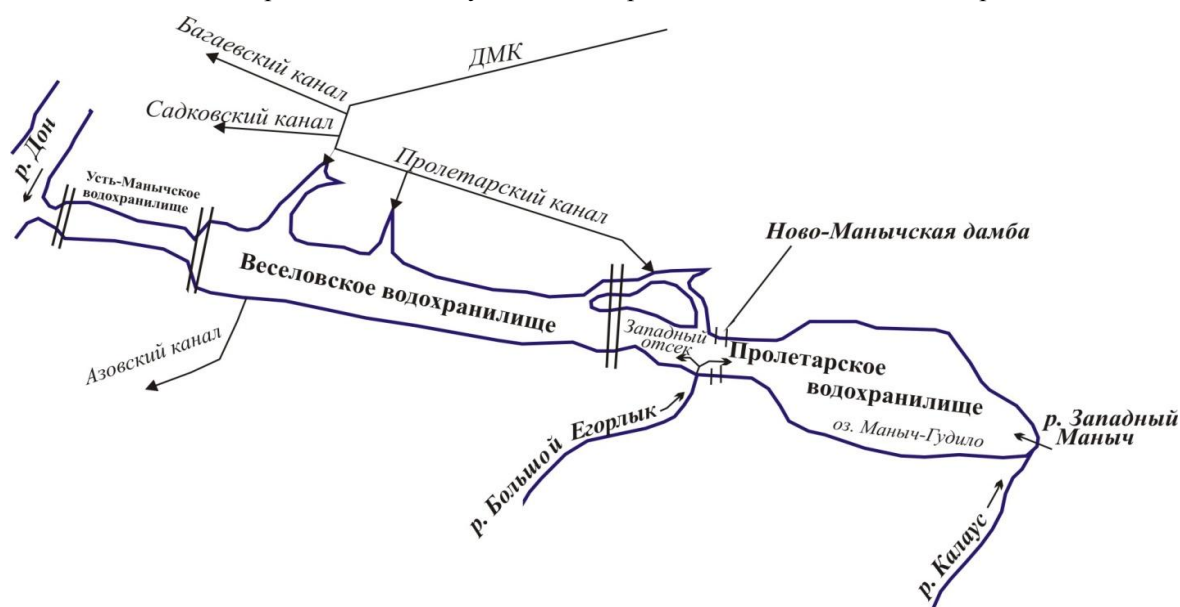


Рис. 3. Карта-схема Пролетарского и Веселовского водохранилищ и основных источников поступления воды для опреснения [3]

Опреснение Пролетарского водохранилища происходит преимущественно за счет притока кубанской воды. Однако наблюдается большая разница уровней минерализации в отсеках Пролетарского водохранилища в связи с тем, что в западный отсек постоянно поступают для опреснения довольно большие массы менее минерализованной кубанской воды, когда восточный, напротив, характеризуется бессточностью, что в сочетании с большим испарением создает благоприятные условия для накопления солей [8].

Местный сток не имеет большого значения для состава вод Пролетарского водохранилища. Кроме подачи кубанской воды по руслу р. Большой Егорлык, в западный отсек поступает и донская вода из Донского магистрального канала (ДМК) (рис. 3), а восточный отсек подпитывается притоками рек Калаус и Большой Егорлык.

Питание Веселовского водохранилища происходит за счет стока донской воды через ДМК, через пропуски Пролетарского гидроузла и в небольшом объеме за счет возвратных вод с рисовых полей Пролетарской оросительной системы. Местный сток формируется маловодными реками и балками, большинство из них пересыхает и наблюдается только во время половодья, которое происходит преимущественно в марте. Следует отметить, что в этом водохранилище, кроме поступления вод, происходит и забор их на орошение Азовской, Веселовской и Манычской ирригационных систем.

Итак, чтобы оценить вклад солевого загрязнения в состояние водных экосистем водохранилищ, необходимо дать оценку качества воды. Для оценки качества воды использован удельный комбинаторный индекс загрязненности воды (УКИЗВ), принятый в мониторинге Росгидромета. Он представляет собой комплексный относительный показатель уровня загрязненности поверхностных вод, условно оценивающий в виде безразмерного числа долю загрязняющего эффекта, вносимого в общий уровень, обусловленный одновременным присутствием комплекса загрязняющих веществ [5].

Как показал анализ, наиболее загрязнена вода в Пролетарском водохранилище. В 2013 г. в створе п. Правый Остров вода оценена как грязная (4 «б» класс; УКИЗВ 4,62), а в створе с. Маныч-Грузское – как очень грязная (4 «в» класс; УКИЗВ 6,19). Менее загрязненной она была в створе Пролетарский гидроузел и оценивалась как грязная (4 «а» класс; УКИЗВ 3,63).

В многолетней динамике в большинстве створов Пролетарского водохранилища качество воды со временем улучшалось. В начале периода исследования (2001 г.) вода створов п. Правый Остров и с. Маныч-Грузское была экстремально грязной (5-й

класс; УКИЗВ 7,37–7,42). Исключением был створ Пролетарский гидроузел, где качество воды ухудшалось с 2001 по 2013 г. Здесь вода оценивалась, как очень загрязненная (3 «б» класс; УКИЗВ 3,23) в начале периода исследования и как грязная (4 «а» класс; УКИЗВ 3,63) – в конце.

В Веселовском водохранилище во всех створах в 2013 г. вода была грязной (4 «а» класс; УКИЗВ 4,05–4,32). Следует отметить, что в Веселовском водохранилище так же, как и в створе Пролетарский гидроузел, качество воды со временем ухудшилось: перешло в более высокий класс, так как в начале периода вода была менее загрязненной (3 «б» класс; УКИЗВ 2,93–3,00). Таким образом, описанная ранее общая тенденция роста минерализации вод Пролетарского и Веселовского водохранилищ за многолетний период с 1971 по 1991 г. [1, 2] в общих чертах сохранилась, хотя и наблюдались отдельные периоды улучшения качества воды по комплексу показателей.

Выводы

Характерными загрязняющими веществами вод Пролетарского и Веселовского водохранилищ во всех створах являются сульфаты и соединения магния. Количество превышений ПДК по сульфатам в отдельные годы соответствовало уровню ВЗ в большинстве створов рассматриваемых водохранилищ. Исключением были створы восточного отсека Пролетарского водохранилища (п. Правый Остров и с. Маныч-Грузское), где содержание сульфатов во все годы соответствовало уровню ВЗ, а иногда и ЭВЗ. Превышение ПДК по соединениям магния достигало уровня ВЗ только в створах восточного отсека. Следует отметить, что к характерным загрязняющим веществам восточного отсека добавляются хлориды, которые также во все годы достигали уровня ВЗ.

Химический состав воды Пролетарского и Веселовского водохранилищ существенно зависит от природных особенностей территории, в частности, от засоленных отложений второй террасы и поймы р. Маныч, влияния талых и дождевых вод, вымывающих соли солончаков и солончаковых почв. Эти особенности обуславливают высокий уровень минерализации вод, которая наблюдается с момента их создания и до настоящего времени, несмотря на мероприятия по опреснению. Наиболее высокоминерализованной остается восточный отсек Пролетарского водохранилища, созданного на месте соленого озера Маныч-Гудило.

В восточном отсеке Пролетарского водохранилища в современный период (2013 г.) уровень минерализации колебался в пределах 16,9–19,2 г/дм³, что в 10–11 раз превышает минерализацию в за-

падном отсеке (1,7 г/дм³). Опреснение восточного отсека Пролетарского водохранилища не принесло больших изменений вследствие малого объема поступления опресняющих вод и сильного испарения в этой части водохранилища.

В Веселовском водохранилище уровень минерализации вод в 2013 г. был относительно низким и практически не отличался от уровня в западном отсеке Пролетарского водохранилища.

Тенденции многолетних изменений наиболее четко прослеживаются по общему уровню минерализации воды Веселовского водохранилища, где выявлено увеличение до 2006–2008 гг. и последующее незначительное уменьшение.

Солевое загрязнение Пролетарского и Веселовского водохранилищ играет важную роль в общей оценке качества воды. В 2013 г. последнее в створах восточного отсека Пролетарского водохранилища, отличающегося максимальным уровнем минерализации, соответствовало водам грязным и очень грязным (4 «б» и «в» классы), тогда как в остальных створах водохранилищ – было несколько лучше (вода грязная, 4 «а» класс).

В многолетнем плане качество воды в большинстве створов водохранилищ ухудшалось. В западном отсеке Пролетарского водохранилища и Веселовском водохранилище качество воды перешло из воды очень загрязненной (3 «б» класс) в грязную (4 «а» класс). Иная тенденция прослеживается в восточном отсеке Пролетарского водохранилища, где оно улучшилось и перешло из экстремально грязной (5-й класс) в воду грязную – очень грязную (4 «б» и «в» классы).

Литература

1. Жукова С.В. Гидролого-экологические аспекты использования водных ресурсов Пролетарского и Веселовского водохранилищ : автореф. дис. ... канд. геогр. наук. Ростов н/Д., 2000. 19 с.
2. Жукова С.В. Оценка влияния на водные биоресурсы и среду их обитания при эксплуатации Цимлянского и Манычских водохранилищ // Рыбохозяйственные проблемы строительства и эксплуатации плотин и пути их решения : материалы заседания тематич. сообщества по проблемам больших плотин и науч. консульт. совета межведом. ихтиол. комиссии. Москва, 25 февраля 2010 г. / А.С. Мартынов, А.Ю. Книжников. М., 2010. С. 47–66.
3. Кривенцов М.И. Гидрохимический режим Пролетарского водохранилища // Гидрохим. материалы. 1957. Т. 26. С. 97–115.
4. Круглова В.М. Веселовское водохранилище. Ростов н/Д., 1962. 115 с.
5. Круглова В.М. Пролетарское водохранилище. Ростов н/Д., 1972. 180 с.
6. Никаноров А.М., Иваник В.М. Словарь-справочник по гидрохимии и качеству вод суши. Ростов н/Д., 2014. 548 с.
7. Качество поверхностных вод Российской Федерации 2011 : ежегодник. Ростов н/Д., 2012. 552 с.
8. О введении в действие порядка подготовки и представления информации общего назначения о загрязнении окружающей природной среды : приказ Росгидромета № 156 от 31 октября 2000 г. URL: <http://www.base.consultatn.ru> (дата обращения: 10.04.2013).
12. Zhukova S.V. *Gidrologo-ekologicheskie aspekty ispol'zovaniya vodnykh resursov Proletarskogo i Veselovskogo vodokhranilishch* [Hydrological and environmental aspects of water resources of the Proletarian and Veselovsk Reservoirs]: avtoref. dis. ... kand. geogr. nauk. Rostov-on-Don, 2000, 19 p.
13. Zhukova S.V. [Assessment of impacts on aquatic resources and their habitats during operation Tsimlyansk and Manyk Reservoirs]. *Rybokhozyaistvennye problemy stroitel'stva i ekspluatatsii plotin i puti ikh resheniya* [Fisheries issues the construction and operation of dams and their solutions]. Materials thematic community meeting on large dams and the scientific advisory board of the interdepartmental ichthyological commission. Moscow, February 25, 2010 / comp. A.S. Martynov, A.Yu. Knizhnikov. Moscow, 2010, pp. 47-66.
14. Kriventsov M.I. *Gidrokhimicheskiy rezhim Proletarskogo vodokhranilishcha* [Hydrochemical regime of Proletarian Reservoir]. *Gidrokhimicheskie materialy*, 1957, vol. 26, pp. 97-115.
15. Kruglova V.M. *Veselovskoe vodokhranilishche* [Veselovsk Reservoir]. Rostov-on-Don, 1962, 115 p.
16. Kruglova V.M. *Proletarskoe vodokhranilishche* [Proletarian Reservoir]. Rostov-on-Don, 1972, 180 p.
17. Nikanorov A.M., Ivanik V.M. *Slovar'-spravochnik po gidrokhimii i kachestvu vod sushi* [Dictionary of hydrochemistry and water quality of land]. Rostov-on-Don, 2014, 548 p.
18. *Kachestvo poverkhnostnykh vod Rossiiskoi Federatsii. 2011: ezhegodnik* [The quality of surface waters of the Russian Federation. 2011: Yearbook]. Rostov-on-Don, 2012, 553 p.
1. О введении в действие Порядка подготовки и представления информации общего назначения о загрязнении окружающей природной среды [On introduction of the procedure of preparation and presentation of general purpose of environmental pollution]: Приказ Росгидромета от 31.10.2000 N 156. Available at: <http://www.base.consultant.ru> (accessed 10.04.2013).

References

УДК 550.385.3, 550.343

СЕЙСМИЧНОСТЬ КРЫМСКО-КАВКАЗСКОГО РЕГИОНА (по результатам инструментальных наблюдений гидродинамических и сейсмических процессов)*

© 2015 г. Л.Е. Собисевич, Э.П. Потемка, А.Л. Собисевич,
Х.Д. Канониди, К.Х. Канониди, Д.А. Преснов, И.И. Суворова

Собисевич Леонид Евгеньевич – доктор технических наук, главный научный сотрудник, Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, ул. Большая Грузинская, 10, г. Москва, 123995, e-mail: sobis@ifz.ru

Sobisevich Leonid Evgen'evich – Doctor of Technical Science, Main Researcher, Schmidt Institute of Physics of Earth RAS, Bolshaya Gruzinskaya St. 10, Moscow, 123995, Russia, e-mail: sobis@ifz.ru

Потемка Эдуард Петрович – кандидат технических наук, начальник партии геодинамических процессов, Всероссийский научно-исследовательский институт гидрогеологии и инженерной геологии, пос. Зеленый, Ногинский район, Московская обл., 142452, e-mail: potemka@mail.ru

Potemka Eduard Petrovich – Candidate of Technical Science, Head of Field Team on Geodynamic Processes, All-Russian Research Institute of Hydrogeology and Engineering Geology, Zeleny, Noginsk District, Moscow Region, 142452, Russia, e-mail: potemka@mail.ru

Собисевич Алексей Леонидович – доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией, Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, ул. Большая Грузинская, 10, г. Москва, 123995, e-mail: alex@ifz.ru

Sobisevich Alexey Leonidovich – Doctor of Physical and Mathematical Science, Head of the Laboratory, Schmidt Institute of Physics of Earth RAS, Bolshaya Gruzinskaya St. 10, Moscow, 123995, Russia, e-mail: alex@ifz.ru

Канониди Харлампий Дмитриевич – кандидат физико-математических наук, заведующий сектором магнитно-ионосферных взаимодействий, Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н.В. Пушкова РАН, г. Троицк, Московская обл., 142190, e-mail: kanonidi@izmiran.ru

Kanonidi Kharlampii Dmitrievich – Candidate of Physical and Mathematical Science, Head of Sector of Magnetic-Ionospheric Interactions, Pushkov Institute of Terrestrial Magnetism, Ionosphere and Radio Wave Propagation RAS, Troitsk, Moscow Region, 142190, Russia, e-mail: kanonidi@izmiran.ru

Канониди Константин Харлампиевич – старший научный сотрудник, Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н.В. Пушкова РАН, г. Троицк, Московская обл., 142190, e-mail: kkkh@izmiran.ru

Kanonidi Konstantin Kharlampievich – Senior Researcher, Pushkov Institute of Terrestrial Magnetism, Ionosphere and Radio Wave Propagation RAS, Troitsk, Moscow Region, 142190, Russia, e-mail: kkkh@izmiran.ru

Преснов Дмитрий Александрович – ведущий инженер, Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, ул. Большая Грузинская, 10, г. Москва, 123995, e-mail: presnov@ifz.ru

Presnov Dmitrii Aleksandrovich – Leading Engineer, Schmidt Institute of Physics of Earth RAS, Bolshaya Gruzinskaya St. 10, Moscow, 123995, Russia, e-mail: presnov@ifz.ru

Суворова Ирина Ивановна – ведущий научный сотрудник, Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, ул. Большая Грузинская, 10, г. Москва, 123995.

Suvorova Irina Ivanovna – Leading Researcher, Schmidt Institute of Physics of Earth RAS, Bolshaya Gruzinskaya St. 10, Moscow, 123995, Russia.

Приведены результаты инструментальных наблюдений гидродинамических и сейсмических процессов, которые были получены на базе Северокавказской геофизической обсерватории ИФЗ РАН (Эльбрусская вулканическая область) и включенных в ее состав наблюдательных пунктов ИЗМИРАН и ВСЕГИНГЕО МПР РФ, расположенных в европейской части России. Проанализированы результаты многолетних комплексных наблюдений с учетом и оценкой сведений о режимообразующих факторах, которые позволили составить обстоятельное представление о развивающихся геодинамических перестройках и оценить состояние сложно построенной геологической среды в этом сейсмоопасном регионе с выходом на прогнозирование разномасштабных сейсмических процессов.

Ключевые слова: геодинамические процессы, геодеформационный мониторинг, предвестники землетрясений, УНЧ вариации магнитного поля, прогнозирование сейсмической опасности.

* Работа выполнена при финансовой поддержке программы № 18 фундаментальных исследований Президиума РАН.

Following prolonged collaboration between the IPE RAS and the VSEINGEO MNR the results of instrumental observations over hydrodynamic and seismic processes obtained in the Geophysical Observatory in Northern Caucasus (Elbrus volcanic area) and in the dedicated observation points located in the European part of Russia are presented. The results of long-term instrumental observations were analyzed simultaneously with specific estimations of principal factors allowing to better understand development of geodynamic reconstructions and to evaluate conditions in complex geological environment of the earthquake-prone region with respect to possible practical applications for prediction of multiscale seismic processes.

Keywords: geodynamic processes, monitoring of geological deformation, earthquake precursors, ULF magnetic field variations, prediction of seismic hazard.

Сложные геофизические и сейсмические процессы на территории Крымско-Кавказского региона обуславливаются особенностями его географического положения в пределах центрального сегмента Альпийско-Гималайского подвижного пояса. Наиболее известными сейсмическими событиями здесь являются катастрофическое землетрясение 20 февраля 1920 г. в Гори (Грузия), разрушительные землетрясения 1927 г. в Крыму, катастрофическое землетрясение, произошедшее 7 декабря 1988 г. в Спитаке, и ряд других. Из недавних событий следует отметить землетрясение 28 мая 2013 г. с магнитудой 5,2, эпицентр которого находился в 26 км к юго-западу от курортного города Теберда (43.19 С.Ш., 41.66 В.Д.).

В лабораториях Северокавказской геофизической обсерватории [1] ведется постоянный многопараметрический мониторинг окружающей среды. Изучаются наклонметрические, магнитовариационные, сейсмические процессы, контроль климатических параметров, геодеформационный и гидрологический скважинный мониторинг. Получаемые натурные данные дают возможность ученым анализировать напряженно-деформированное состояние геологической среды и проводить гидрогеохимический мониторинг газов глубинного генезиса (радон, торон, гелий) с целью оценки активности эндогенных процессов в региональном масштабе.

Комплексный анализ результатов экспериментальных наблюдений, учёт и оценка сведений о режимеобразующих факторах позволяют составить обстоятельное представление о развивающихся геодинамических процессах и оценить состояние сложно построенной геологической среды в этом сейсмоопасном регионе с выходом на прогнозирование катастрофических сейсмических процессов.

На тектонические и геодинамические процессы Северо-Западного Кавказа влияют условия его геологического развития, приуроченность к разрывным сейсмогенерирующим и шовным зонам контактов структур первого порядка. В них прослеживаются дифференцированные тектонические движения, которые обуславливают сейсмическую активность [2].

Район Большого Сочи и прилегающие территории относятся к альпийской складчатой области

мегаантиклинория Большого Кавказа. Основными структурно-тектоническими элементами рассматриваемой площади, начиная от побережья Черного моря, являются Адлерская тектоническая депрессия (краевая зона Грузинской глыбы) и антиклиналь Ахцу-Кацирха. Они ограничены на северо-западе Курджипским, а на юго-востоке – Пицундским глубинными разломами, приуроченные к зоне сопряжения Сочи-Адлерской тектонической депрессии и Чвижепсинской структурно-фациальной (промежуточной) зоне. Северо-восточнее простирается антиклинорий Главного хребта. Район осложнен рядом мелких тектонических нарушений разного порядка и взаимоподчиненности [3]. Современные движения в пределах Большого Сочи сильно дифференцированы и характеризуются довольно низкими скоростями в пределах шельфовой области от 0,8 до 0,9 мм/г и до 8–12 мм/г в осевой части Главного Кавказского хребта.

Современные движения Большого Кавказа хорошо отображают особенности его морфоструктуры – наблюдается продольная зональность, выраженная в нарастании скоростей в меридиональном направлении от периферии горного сооружения к его осевой части и сопровождающаяся значительными градиентами. Южный склон Большого Кавказа характеризуется сменой сейсмической активности и сейсмических затиший. Например, в районе Красной Поляны 28 января 1909 г. было зарегистрировано землетрясение силой 6 баллов, 21–27 декабря 1955 г. – 7–8 баллов, 3 января 1956 г. – 6–7 баллов. Эпицентры землетрясений силой до 6 баллов сосредоточены в сравнительно узкой полосе вдоль кавказского берега Черного моря – от Сочи до Сухуми. Большинство эпицентров местных слабых землетрясений тяготеют к межблоковым шовным зонам.

Обращаясь к экспериментальным наблюдениям, отражающим сейсмическую активность в районе Западного Кавказа, и принимая во внимание результаты скважинных наблюдений во второй половине декабря 2012 г., проведенных нами в пределах центрального сегмента Северного Кавказа с целью оценки сейсмической активности в период подготовки к проведению Олимпийских игр, можно отметить, что напряженно-деформированное состоя-

ние геологической среды в регионе характеризовалось аномальными амплитудами уровней подземных вод (УПВ). По данным наблюдений за их изменениями, здесь к середине декабря сформирова-

лась обширная зона растяжения, отражающая условия подготовки сейсмических событий малых и средних энергий с общей вероятностью реализации в пределах радиуса 200 км (рис. 1).

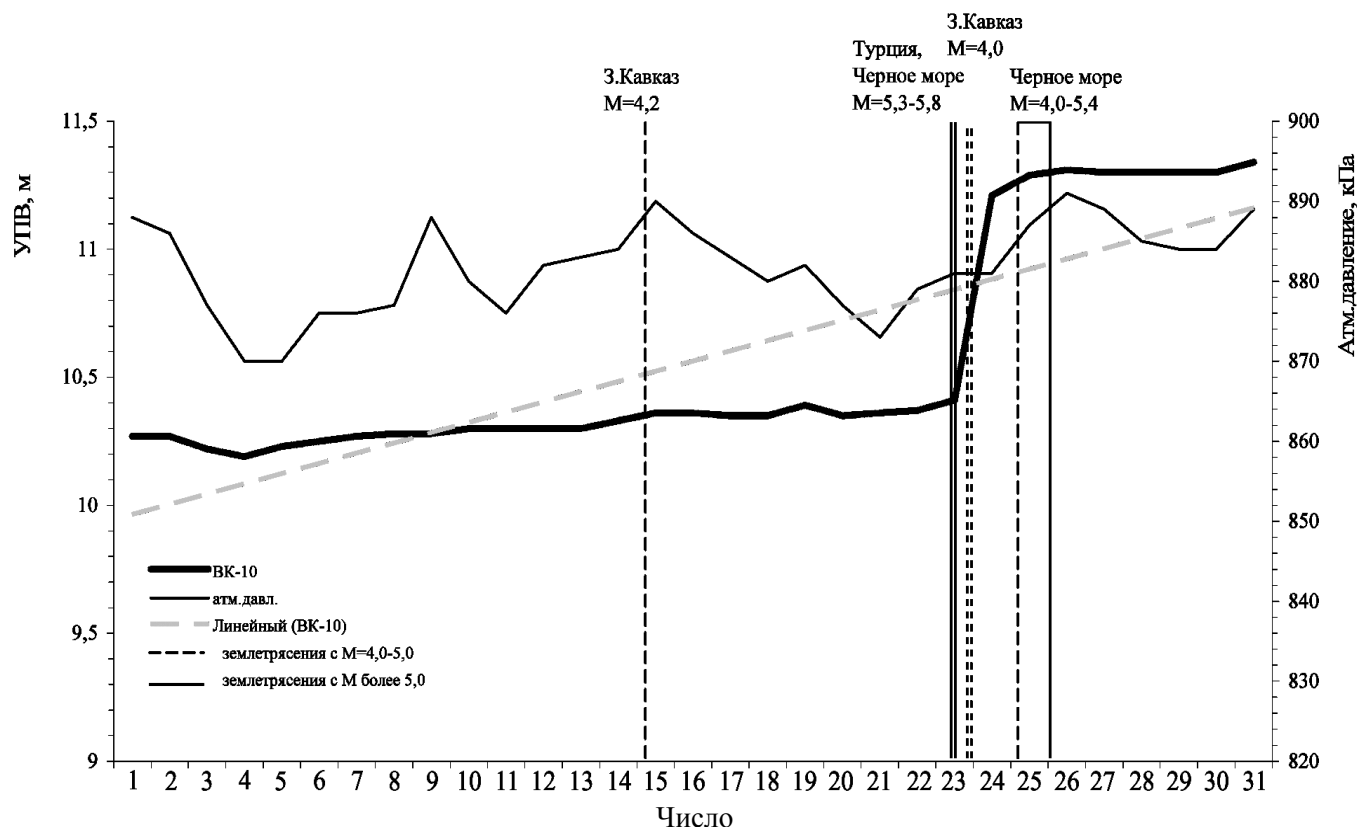


Рис. 1. Изменения уровня подземных вод в скважине и атмосферного давления за декабрь 2012 г. (центральный сегмент Северного Кавказа)

Заметный подъем УПВ в контрольных скважинах начался 15 декабря 2012 г. Причем по всем регистрируемым параметрам (температура подземных вод, объемные содержания радона, торона и гелия) тенденция трансформации напряжений сохранилась практически до 19 января 2013 г. Сейсмически активными в декабре 2012 г. являлись Терско-Сулакская зона прогибов; Новороссийско-Лазаревская складчатая зона; разлом I порядка в пределах юго-восточной части Восточно-Кубанского прогиба; складчатая зона Главного хребта на территории Грузии; область континентального шельфа Черноморской впадины, в зоне влияния глубинного разлома.

По результатам газогидрохимического мониторинга в годовом цикле была выявлена тенденция повышения объемного содержания гелия в воде на фоне сезонного увеличения выноса газа. Контрастное увеличение объемного содержания гелия в воде зафиксировано 15–16 и 27–28 декабря 2012 г.

(рис. 2). Именно в этот период сейсмическая активизация наблюдалась и на Кавказе, и на шельфе Черного моря.

Итак, опираясь на результаты геодеформационного мониторинга, отмечаемую в декабре активизацию напряженно-деформированного состояния геологической среды в изучаемом регионе мы отнесли к верхнефоновой по средним многолетним региональным оценкам. Наблюдаемые при этом аномалии в геофизических полях отражают развитие в районе Большого Сочи и на прилегающих территориях отдельных очагов напряжений, характерных для сейсмических событий, формирующихся на глубинах порядка 10–15 км с магнитудой от 3 до 5. Эти данные, обобщающие результаты проведенного газогидрогеохимического мониторинга, позволили перед Олимпийскими играми оценить геодинамическую обстановку в районе Большого Сочи и на прилегающих территориях как относительно спокойную.

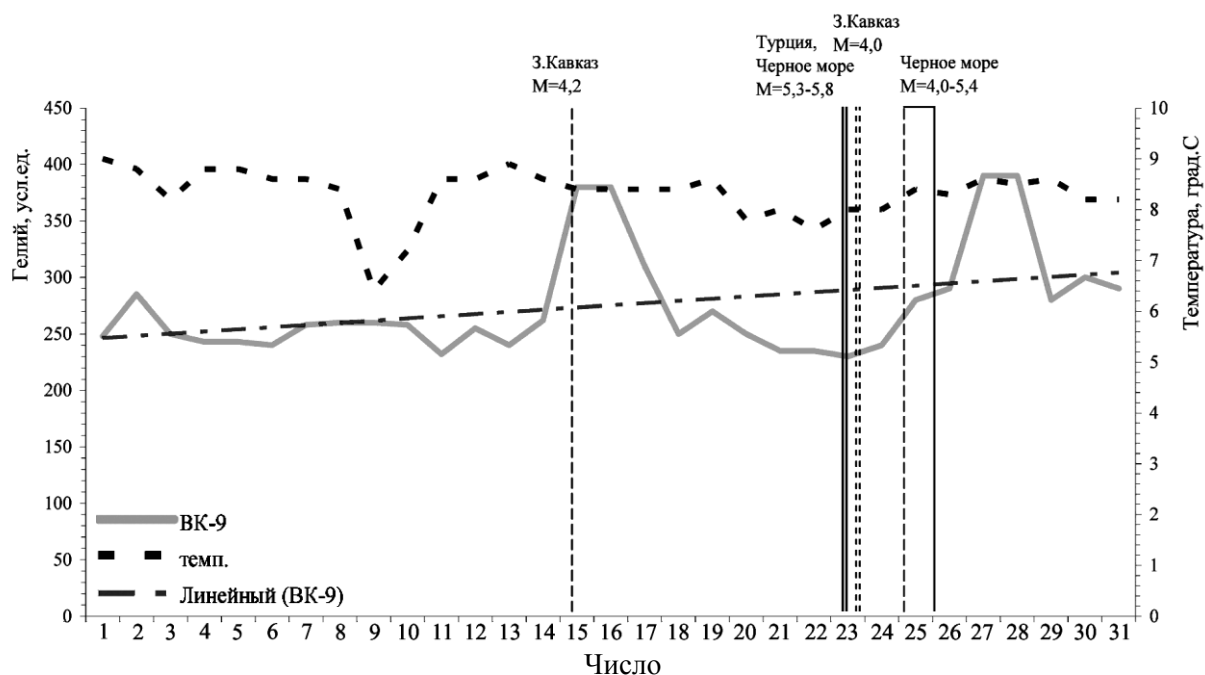


Рис. 2. Изменения содержания гелия в воде и температуры в скважине, декабрь 2012 г. (центральный сегмент Северного Кавказа)

Такое заключение было сделано исходя из того, что на большей части территории Северо-Кавказского региона состояние геологической среды в конце 2012 – начале 2013 г. оставалось на уровне фоновых значений. Отклонения наблюдались только в первой и второй декадах декабря, когда участилась повторяемость слабых сейсмических событий в регионе с магнитудами до 3,5, а уже в третьей произошло несколько заметных землетрясений.

Сетью сейсмических станций Геофизической службы РАН и аппаратурными комплексами Северокавказской геофизической обсерватории 23 декабря 2012 г. в 17.31 по московскому времени на шельфе Черного моря у побережья Абхазии, в 65 км к западу от г. Сухуми, было зафиксировано ощутимое землетрясение с магнитудой 5,6, глубина очага 10 км. Затем 25 декабря в Черном море у побережья Абхазии было ещё два землетрясения с магнитудами 5,4 и 4,4.

Говоря об указанных сейсмических событиях, отметим, что все они могут быть отнесены к коровым, характерным для Крымско-Кавказского региона. В этой связи представляет определенный научный интерес их сопоставительный анализ за последние годы [1]. Начнем с турецкого землетрясения 8 марта 2010 г. (08 02:32:34 UTC, координаты эпицентра 38.873° С.Ш., 39.981° В.Д., глубина 12 км, магнитуда 6,1) [4].

Приборы Северокавказской геофизической обсерватории (расстояние 590 км от эпицентра) и магнитные вариометры в районе пункта «Карпогоры» (Архангельская область, расстояние 2860 км от эпицентра) зафиксировали как сейсмические сигналы, так и магнитные возмущения, наведенные этим сейсмическим событием. Перед всеми землетрясениями наблюдались отчетливые магнитные предвестники. Регистрация и анализ данного класса магнитных сигналов от ближних коровых сейсмических событий являются значимыми с точки зрения понимания электромагнитных процессов, возбуждаемых при трансформации геологических структур.

Подготовка тектонического землетрясения – сложный геодинамический процесс. Существует несколько моделей, которые предложены для объяснения ряда наблюдаемых явлений, связанных с появлением предвестников и других возмущений, предвещающих разномасштабные сейсмические события. В числе предвестников выделяют и магнитные возмущения, природа которых до сих пор остается дискуссионной [1].

Сопоставляя полученные волновые формы магнитных возмущений, зарегистрированных на Северном Кавказе и в субавроральной зоне (Архангельская область), отметим появление характерных аномальных магнитных возмущений (своеобразных предвестников) за два с половиной часа до главного удара (рис. 3).

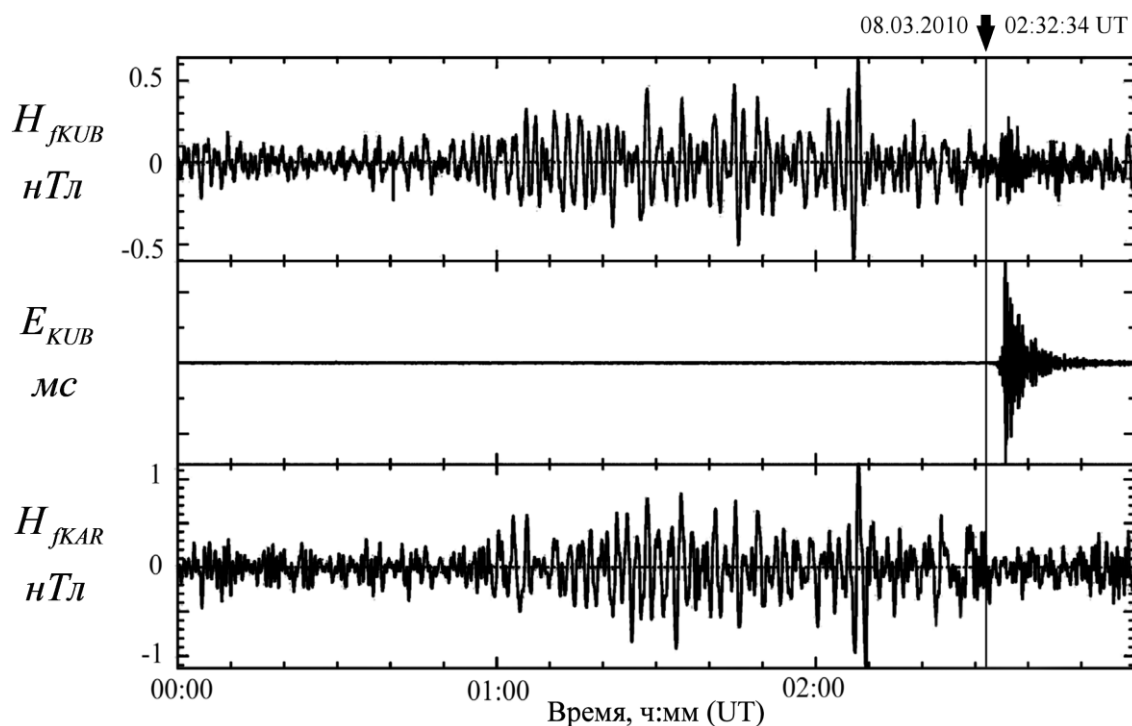


Рис. 3. Вариации магнитного поля Земли (Н-компонета) и наклонов земной поверхности (Е, «Восток–Запад»), зафиксированные в лаборатории № 4 Северокавказской геофизической обсерватории, а также в научном стационаре «Карпогоры» в период подготовки и развития землетрясения в Турции 03.08.2010 г. Данные магнитных вариометров профильтрованы в диапазоне периодов 20 – 300 с

Основные характеристики землетрясения на Западном Кавказе 19 января 2011 г. (время в очаге 09:17:53.7, координаты эпицентра: N 42.02, E 42.67, глубина 25 км, магнитуда 5,3) сопоставимы с рассмотренным выше турецким событием.

На рис. 4 приведены записи вариаций магнитного поля Земли (Н, D, Z) и наклонов земной поверхности (EW), зарегистрированные информационно-измерительными комплексами лаборатории № 2 Северокавказской геофизической обсерватории в период подготовки и развития этого землетрясения. Полученные экспериментальные материалы позволяют выделить две области на магнитограммах (фрагменты 1 и 2), в которых проявились аномальные магнитные возмущения, предшествующие главному удару.

Как и в случае турецкого, зафиксированные аномальные магнитные возмущения в период подготовки и развития кавказского землетрясения отличаются характерной структурой и являются достаточно информативными предвестниками. Структура аномальных магнитных возмущений (краткосрочных предвестников) претерпевает заметные изменения на всех этапах подготовки и развития землетрясения, а их регистрация происходит как вблизи, так и на значительном расстоянии от эпицентра события (рис. 3).

Аналогичные результаты были получены и при анализе землетрясений в районе Большого Сочи, которые подробно проанализированы в нашей работе [5].

Комплексные гидрофизические и сейсмические наблюдения, связанные с изучением условий формирования и перестроения структур гидрогеодеформационного поля в периоды различной сейсмической активности на территории Северного Кавказа, позволили проследить, как подземная гидросфера реагирует на все региональные изменения напряжений в земной коре, включая и развитие процессов подготовки землетрясений. Подтверждено, что геодинимический мониторинг дает возможность получать обширную информацию о развивающихся геодинимических и сопутствующих сейсмических процессах в верхних слоях литосферы. Сведения, которые в настоящее время удается получить при оценке структурной перестройки геологической среды, составляют из-за ряда нерешенных пока научных и научно-методических вопросов лишь часть этой информации.

Время развития сейсмического процесса, связанного с подготовкой землетрясений, по данным геодинимического мониторинга во многих случаях устанавливается относительно точно (за 1–15 сут). Более проблематичным является прогноз места и точного времени сильного землетрясения.

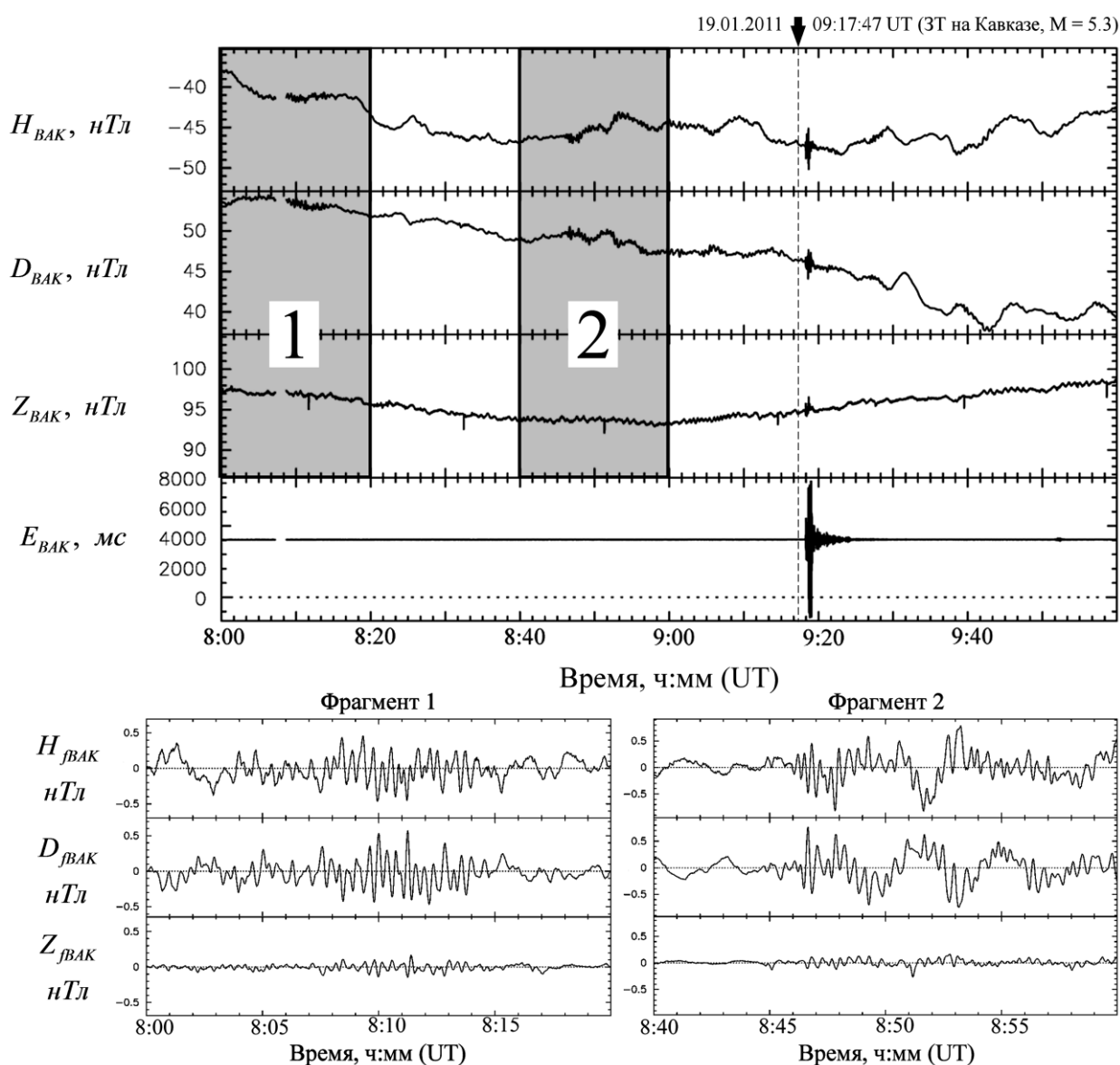


Рис. 4. Записи вариаций магнитного поля Земли (H_{BAK} , D_{BAK} , Z_{BAK}) и наклонов земной поверхности (E_{BAK}) информационно-измерительными комплексами Северокавказской геофизической обсерватории в период подготовки и развития сейсмического события на западном Кавказе 19.01.2011 г., а также результаты частотной фильтрации их фрагментов (полоса пропускания фильтра 30 – 300 с)

В региональной динамике поля напряжений просматривается пока лишь некоторая ориентация, указывающая предположительно на регион, в котором ожидается сейсмическое событие. В связи с этим необходимо дальнейшее, более углубленное, изучение природы структурной перестройки поля напряжений и возникающих в этой связи сопутствующих возмущений полевых структур.

Анализ аномальных вариаций магнитного поля Земли, которые предвещают развитие сейсмических событий, имеет важное фундаментальное и

прикладное значение. Получаемые здесь экспериментальные данные позволяют расширить наши знания в области изучения сложных механизмов подготовки и развития землетрясений как на суше, так и в море [6 – 8]. В ряде случаев аномальные магнитные возмущения могут быть использованы при построении прогностических алгоритмов, развиваемых в интересах построения специальных информационно-измерительных систем предупреждения о надвигающихся катастрофических землетрясениях, а приведенные выше развернутые волновые формы позволяют проследить за изме-

нениями, которые происходят в структуре аномальных магнитных возмущений по мере приближения главного сейсмического удара.

В заключение отметим, что представительный анализ сложных геодинамических и геофизических процессов в зоне подготовки сейсмического события рассмотрен в работах В.Н. Николаевского [9]. Согласно развиваемым им в течение многих лет подходам, на формирующиеся структуры в области подготовки сейсмических событий зоны сжатия и растяжения возникают практически одновременно. Как и при взрыве, избыточный объем зоны растяжения вытесняется (иначе говоря, контур зоны разрушения перемещается) во внешний упругий массив. На этом этапе в ходе упругопластического деформирования происходит важнейшее геофизическое явление, связанное с локализацией отдельных дилатантных структур. В развитие этого процесса появляются и поверхности скольжения. Локализация может быть ускорена поступлением флюидов в вакуумированное поровое пространство (в том числе атомарный водород), снижением поверхностной энергии Гриффитса свежих трещин, их быстрым прорастанием. Именно этим завершается внутреннее разрушение отдельных объемов наэлектризованных дилатантных структур, спонтанно формирующихся в очаге готовящегося землетрясения. Зоны разрушения «мгновенно» лишаются своего объема, а из зон упругого сжатия происходит динамическая отдача упругой и электромагнитной энергии.

Известно, что важным параметром, который отражает масштабы разуплотнения разломно-блоковых образований в земной коре, служит поведение коды S-волн. Следуя В.Н. Николаевскому, естественно полагать, что в масштабах региональной тектоники целые этажи земной коры могут работать как гигантские дилатирующие образования, обеспечивая условия для формирования очаговых зон [1, 9 – 13].

Результаты анализа наблюдений геодинамических и сейсмических процессов в Крымско-Кавказском регионе дают основания сделать оптимистический вывод о том, что прогнозированию места готовящегося сейсмического события способствовала бы разработка новых, более информативных технологий анализа геофизических полей на различных этапах перестройки геологической среды. Следует при этом учитывать, что современные наблюдательные пункты региональной прогностической сети, особенно в южных сейсмоактивных регионах России, расположены редко, что затрудняет определять место будущей сейсмической катастрофы. Базовым элементом геодинамического мониторинга должна быть комплекс-

ная (геофизическая, геохимическая и гидрогеологическая) сеть наблюдений с максимальным использованием существующей режимной гидрогеологической сети, глубоких и сверхглубоких скважин и ключевых участков контроля над развитием техногенных и экзогенных процессов.

Литература

1. Собисевич Л.Е., Канониди К.Х., Собисевич А.Л. Аномальные геомагнитные возмущения в вариациях магнитного поля Земли на этапах подготовки и развития глубокофокусных землетрясений // Докл. АН. Геофизика. 2013. Т. 453, № 3. С. 329 – 333.
2. Рогожин Е.А. Очерки региональной сейсмотектоники. М., 2012. 340 с.
3. Рогожин Е.А., Собисевич Л.Е. Волновые возмущения, наведенные коровыми землетрясениями (на примере двух сильных землетрясений в Кавказско-Анатолийском секторе альпийского Средиземноморского подвижного пояса) // Физика Земли. 2014. № 2. С. 148 – 156.
4. Дударов З.И., Канониди Х.Д., Канониди К.Х., Шевченко А.В. Регистрация вариаций магнитного поля в районе Эльбрусского вулканического центра во время сильных землетрясений на территории Кавказского региона // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2011. № 4. С. 42–44.
5. Собисевич Л.Е., Канониди К.Х., Собисевич А.Л. О механизме формирования очагов глубокофокусных землетрясений // Докл. АН. Геофизика. 2014. Т. 459, № 1. С. 1 – 6.
6. Собисевич Л.Е., Канониди К.Х., Собисевич А.Л. Ультранизкочастотные электромагнитные возмущения, возникающие перед сильными сейсмическими событиями // Докл. АН. Геофизика. 2009. Т. 429, № 5. С. 1 – 4.
7. Собисевич Л.Е., Канониди К.Х., Собисевич А.Л. Наблюдения УНЧ геомагнитных возмущений, отражающих процессы подготовки и развития цунамигенных землетрясений // Докл. АН. Геофизика. 2010. Т. 435, № 4. С. 548 – 553.
8. Старостенко В.И., Собисевич А.Л., Кендзера А.В., Собисевич Л.Е., Шуман В.Н., Потемка Э.П., Канониди К.Х., Вольфман Ю.М., Гарифулин В.А. Черноморские землетрясения конца декабря 2012 года (геолого-геофизическая позиция, наведенные магнитные возмущения) // Геофиз. журн. 2013. № 6, Т. 35. С. 54 – 70.
9. Николаевский В.Н. Очаг землетрясения – события и предвестники удара // Экстремальные природные процессы и катастрофы. М., 2011. Т. 2. С. 316 – 322.
10. Николаевский В.Н. Обзор : земная кора, дилатансия и землетрясения. М., 1982. С. 133 – 202.
11. Собисевич А.Л. Избранные задачи математической геофизики, вулканологии и геоэкологии. Т. 1. М., 2012. 510 с.

12. Собисевич А.Л. Избранные задачи математической геофизики, вулканологии и геоэкологии. Т. 2. Северокавказская геофизическая обсерватория. Создание, анализ результатов наблюдений. М., 2013. 512 с..

13. Собисевич Л.Е., Собисевич А.Л., Канониди Х.Д., Канониди К.Х., Преснов А.Д. Инструментальные наблюдения аномальных геомагнитных возмущений, наведенных в геосферах при подготовке и развитии сейсмических событий // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. Науки. 2014. № 6. С. 42 – 51.

References

1. Sobisevich L.E., Kanonidi K.Kh., Sobisevich A.L. Anomal'nye geomagnitnye vozmushcheniya v variatsiyakh magnitnogo polya Zemli na etapakh podgotovki i razvitiya glubokofokusnykh zemletryasenii [Abnormal geomagnetic disturbances in the Earth's magnetic field variations in the stages of preparation and development of deep-focus earthquakes]. *Doklady AN. Geofizika*, 2013, vol. 453, no 3, pp. 329-333.

2. Rogozhin E.A. *Ocherki regional'noi seismotektoniki* [Essays of regional seismotectonics]. Moscow, 2012, 340 p.

3. Rogozhin E.A., Sobisevich L.E. Volnovye vozmushcheniya, navedennye korovymi zemletryasenyami (na primere dvukh sil'nykh zemletryasenii v Kavkazsko-Anatoliiskom sektore al'piiskogo Sredizemnomorskogo podvizhnogo poyasa) [The wave disturbance induced crustal earthquakes (for example, two strong earthquakes in the Caucasus-Anatolian Mediterranean sector of Alpine mobile belt)]. *Fizika Zemli*, 2014, no 2, pp. 148-156.

4. Dudarov Z.I., Kanonidi K.Kh., Kanonidi Kh.D., Shevchenko A.V. Registratsiya variatsii magnitnogo polya v raione El'brusskogo vulkanicheskogo tsentra vo vremya sil'nykh zemletryasenii na territorii Kavkazskogo regiona [Registering variations of the magnetic field in the area of Elbrus volcanic center during strong earthquakes in the Caucasus Region]. *Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskii region. Estestvennye nauki*, 2011, no 4, pp. 42-44.

5. Sobisevich L.E., Kanonidi K.Kh., Sobisevich A.L. O mekhanizme formirovaniya ochagov glubokofokusnykh zemletryasenii [On the mechanism of formation of pockets of deep-focus earthquakes]. *Doklady AN. Geofizika*, 2014, vol. 459, no 1, pp. 1-6.

6. Sobisevich L.E., Kanonidi K.Kh., Sobisevich A.L. Ul'tranizkochastotnye elektromagnitnye vozmushcheniya,

voznikayushchie pered sil'nymi seismicheskimi sobyitiyami [Ultra-low electromagnetic disturbances that occur before strong seismic events]. *Doklady AN. Geofizika*, 2009, vol. 429, no 5, pp. 1-4.

7. Sobisevich L.E., Kanonidi K.Kh., Sobisevich A.L. Nablyudeniya UNCh geomagnitnykh vozmushchenii, otrazhayushchikh protsessy podgotovki i razvitiya tsunamigennykh zemletryasenii [The observations of ULF geomagnetic disturbances, reflects the process of training and development of tsunami earthquakes]. *Doklady AN. Geofizika*, 2010, vol. 435, no 4, pp. 548-553.

8. Starostenko V.I., Sobisevich A.L., Kendzera A.V., Sobisevich L.E., Shuman V.N., Potemka E.P., Kanonidi K.Kh., Vol'fman Yu.M., Garifulin V.A. Chernomorskie zemletryaseniya kontsa dekabrya 2012 goda (geologo-geofizicheskaya pozitsiya, navedennye magnitnye vozmushcheniya) [Black Sea earthquake the end of December 2012 (geological and geophysical position, induced magnetic disturbances)]. *Geofizicheskii zhurnal*, 2013, vol. 35, no 6, pp. 54-70.

9. Nikolaevskii V.N. Ochag zemletryaseniy - sobytiya i predvestniki udara [The earthquake - the harbingers of events and stroke]. *Ekstremal'nye prirodnye yavleniya i katastrofy*. Moscow, 2011, vol. 2, pp. 316-322.

10. Nikolaevskii V.N. *Obzor: zemnaya kora, dilatatsiya i zemletryaseniya* [Overview: the crust, dilatancy and earthquakes]. Moscow, 1982, pp. 133-202.

11. Sobisevich A.L. *Izbrannye zadachi matematicheskoi geofiziki, vulkanologii i geoekologii* [Selected problems of mathematical geophysics, volcanology and geoecology]. Vol. 1. Moscow, 2012, 510 p.

12. Sobisevich A.L. *Izbrannye zadachi matematicheskoi geofiziki, vulkanologii i geoekologii* [Selected problems of mathematical geophysics, volcanology and geoecology]. Vol. 2. Severokavkazskaya geofizicheskaya observatoriya. Sozdanie, analiz rezul'tatov nablyudeniya [North Caucasian Geophysical Observatory. Create, analyze the results of observations]. Moscow, 2013, 512 p.

13. Sobisevich L.E., Sobisevich A.L., Kanonidi Kh.D., Kanonidi K.Kh., Presnov A.D. Instrumental'nye nablyudeniya anomal'nykh geomagnitnykh vozmushchenii, navedennykh v geosferakh pri podgotovke i razvitiu seismicheskikh sobytii [Instrumental observations of anomalous geomagnetic disturbances induced in the geosphere in the preparation and development of seismic events]. *Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskii region. Estestvennye nauki*, 2014, no 6, pp. 42-51.

УДК 631.6.02

ТЯЖЕЛЫЕ МЕТАЛЛЫ В ПОЧВАХ УРБОЛАНДШАФТОВ г. РОСТОВА-НА-ДОНУ

© 2015 г. Д.Ю. Шишкина

Шишкина Диана Юрьевна – кандидат географических наук, доцент, кафедра геоэкологии и прикладной геохимии, институт наук о Земле Южного федерального университета, ул. Зорге, 40, г. Ростов н/Д, 344090, e-mail: diana@sfedu.ru

Shishkina Diana Yur'evna – Candidate of Geographical Science, Associate Professor, Department of Geoecology and Applied Geochemistry, Sciences Institute about the Earth of the Southern Federal University, Zorge St., 40, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: diana@sfedu.ru

Проанализированы основные особенности и содержание тяжелых металлов в различных функциональных зонах г. Ростова-на-Дону. Выявлены накопление тяжелых металлов в почвах промышленных и селитебных ландшафтов, а также долговременные тенденции аккумуляции тяжелых металлов в верхнем почвенном горизонте. Уровень загрязнения почв оценен как допустимый и умеренно опасный.

Ключевые слова: тяжелые металлы, функциональные зоны, источники загрязнения, геохимические ассоциации и аномалии, суммарный показатель загрязнения.

The content and main features of distribution of heavy metals in the soils from different functional zones have been analyzed. The accumulation of heavy metals in the soils of industrial and settlement urban landscapes has been noted. The long-term trends in accumulation of heavy metals in topsoils were identified. The soil pollution level was assessed as acceptable and moderately dangerous.

Keywords: heavy metals, functional zones, sources of pollution, geochemical associations and anomalies, total pollution index.

Распределение тяжелых металлов в почвах Ростова н/Д, их миграция и аккумуляция в различных урболандшафтах, а также санитарно-гигиеническая оценка городских почв рассмотрены во многих публикациях [1 – 5]. К настоящему времени получен ряд важных результатов: установлены общие закономерности пространственного распределения тяжелых металлов, выявлена локализация геохимических аномалий и определен их генезис, выполнена эколого-геохимическая оценка функциональных зон города и отдельных участков городской территории.

Однако некоторые аспекты проблемы остаются малоисследованными. Прежде всего это детальная характеристика распределения химических элементов в почвах различных городских функциональных зон. Весьма ограничены данные, характеризующие поведение таких опасных токсикантов, как кадмий, ртуть и мышьяк. Не установлены современные тенденции распределения тяжелых металлов.

Объекты и методы исследований

В основу работы положены материалы, полученные в 2012 – 2014 гг. в ходе эколого-геохимических исследований на территории городских парков, селитебных и промышленных функциональных зон, а также сохранившихся

фрагментов природных ландшафтов. Было отобрано 116 проб почв, причем основной объем опробования пришелся на рекреационные зоны – в пределах 10 городских парков отобрано 76 почвенных образцов. Промышленные ландшафты представлены промплощадкой ОАО «Эмпилс» в северо-западной промышленной зоне и электроподстанцией на Гвардейской площади. Селитебные ландшафты – территория на пересечении ул. М. Горького и пер. Нахичеванского, в прошлом занятая одноэтажной застройкой, где в настоящее время возводится жилищный комплекс «21 век». Условно природные ландшафты – участок в северной части города, расположенный на пойме и первой надпойменной террасе левого берега р. Темерник. Территория практически не освоена, на ней развита луговая и степная растительность, значительная часть площадки заболочена.

Изучалось распределение в верхнем почвенном горизонте химических элементов, включенных в стандартный перечень химических показателей качества почв: свинца, кадмия, цинка, меди, никеля, мышьяка, ртути [6]. Аналитические исследования выполнялись в региональном лабораторном центре ОАО «Южгеология» и испытательном лабораторном центре ФБУЗ «Центр гигиены и эпидемиологии в Ростовской области».

Характеристика временной динамики распределения элементов проводилась путем сравнения

с данными эколого-геохимических исследований в северо-западной части Ростова н/Д, проведенных в 1994 г. [2]. Для эколого-геохимической оценки были использованы такие геохимические коэффициенты и показатели, как коэффициент концентрации и суммарный показатель загрязнения. Коэффициент концентрации (K_c) – отношение содержания химического элемента в оцениваемом объекте к его фоновому содержанию; суммарный показатель загрязнения (СПЗ, Z_c), позволяющий оценить уровень комплексного загрязнения, представляет собой аддитивную сумму превышений концентраций отдельных элементов над единичным (фоновым) уровнем: $Z_c = \sum K_c - (n-1)$, где K_c – коэффициент концентрации; n – число химических элементов, входящих в изучаемую ассоциацию.

При $Z_c < 16$ категория загрязнения оценивается как допустимая, если Z_c лежит в диапазоне 16 – 32 – умеренно опасная, в диапазоне 32 – 128 – опасная [7].

В качестве геохимического фона принимались средние концентрации химических элементов в почвах природных ландшафтов Ростовской области, полученные в ходе многолетних исследований, проводимых сотрудниками кафедры геоэкологии и прикладной геохимии ЮФУ [8 – 12]. Оценка степени загрязнения почв проводилась на основе санитарно-гигиенических нормативов – предельно допустимых концентраций (ПДК) и ориентировочно допустимых концентраций (ОДК) химических элементов [13, 14].

Результаты исследований

Распределение цинка характеризуется высокой контрастностью: в почвах различных ландшафтных зон его содержание варьирует от 15 до 1000 мг/кг (табл. 1). Среднее содержание, изменяющееся от 126 (природные ландшафты) до 328,8 мг/кг (промышленные), повсеместно превосходит естественный геохимический фон, K_c варьирует от 1,5 до 3,9 (табл. 2). Загрязнение почвенного покрова

цинком выявлено во всех ландшафтах, исключая природные. Наиболее высокие концентрации зафиксированы на промплощадке ОАО «Эмпилс», где содержание элемента достигает 1000 мг/кг, или 4,5 ОДК. Следует отметить, что «Эмпилс» – ведущий российский производитель декоративных лакокрасочных покрытий и оксида цинка (цинковых белил). Предприятие существует на двух площадках, одна из которых, расположенная в центре города, выпускает цинковые белила с 1923 г. В ходе эколого-геохимических исследований Ростова н/Д В.В. Приваленко выявил, что это лакокрасочное производство находится в эпицентре загрязнения почвенного покрова цинком [3]. Спустя десятилетия завод по-прежнему остаётся наиболее мощным источником загрязнения почвы. Именно в его окрестностях зафиксированы максимальные концентрации Zn – 2462 мг/кг [5].

Наши исследования проводились на второй площадке, строительство которой развернулось в 70-е гг. XX в. Содержания цинка здесь достигают 1000 мг/кг; превышающие ОДК концентрации обнаружены в восьми из пятнадцати проб. Пространственное распределение элемента весьма неоднородно: уже на расстоянии 100 м от центральной площадки с наибольшим уровнем загрязнения содержание падает до 50–80 мг/кг.

За последние двадцать лет произошло существенное снижение концентраций цинка в городских почвах. Максимальные концентрации элемента уменьшились на порядок: в 1994 г. они достигали 10000 мг/кг, сейчас – 1000 (табл. 1). Заметно снизились и средние концентрации, особенно резко – почти в 4 раза – в почвах селитебных ландшафтов. Тенденция снижения уровня загрязнения почв цинком подтверждается и исследованиями В.В. Приваленко, отмечавшего уменьшение контрастности геохимических аномалий элемента в 1995 – 1998 гг. [3]. Превышения ОДК Zn выявлены в 22 % общего числа проб, отобранных на территории селитебных, рекреационных и промышленных ландшафтов.

Таблица 1

Пределы колебаний содержаний химических элементов в почвах различных урбандшафтов, мг/кг

Химические элементы	Городские ландшафты						
	Природные (2014 г.)	Рекреационные		Селитебные		Промышленные	
		1994 г.	2013 г.	1994 г.	2012 г.	1994 г.	2014 г.
Pb	10–40	20–400	10–200	20–1000	11–77	20–3000	8–400
Zn	80–200	80–2000	15–800	80–10000	31–699	100–3000	50–1000
Cd	0,11–0,21	–	0,2–0,5	–	0,07–0,8	–	0,35–2,2
Hg	0,006–0,021	–	0,014–0,045	–	0,06–0,38	–	0,006–0,031
As	1,1–4,4	–	1–3	–	0,41–20	–	0,8–3,3
Ni	30–50	30–60	30–100	20–80	22–32	30–80	9,7–50
Cu	30–50	30–200	50–300	30–500	10,3–61	40–300	20–78,1

Таблица 2

Среднее содержание химических элементов в почвах различных урболандшафтов, мг/кг

Химические элементы	Городские ландшафты							Фон	ПДК (ОДК)
	Природные	Рекреационные		Селитебные		Промышленные			
	2014	1994	2013	1994	2012	1994	2014		
Pb	22,5	46,4	42	98,9	51	131,5	67	24,0	130
Zn	126	284,1	192,8	781,2	200,5	348,4	328,8	84,3	220
Cd	0,16	–	0,37	–	0,27	–	0,87	0,22	2,0
Hg	0,112	–	0,031	–	0,21	–	0,01	0,13	2,1
As	2,52	–	1,74	–	8,9	–	1,8	4,76	10
Ni	44	46,4	47,5	50,6	27	44,2	37,3	41,0	80
Cu	39	59,8	89,5	78,4	29,8	61,4	40,7	34,8	132

Концентрации свинца изменяются от 10 до 400 мг/кг, причем минимальные концентрации характерны для природных ландшафтов, максимальные – для промышленных. Только в почвах природных ландшафтов содержание Pb ниже естественного педогеохимического фона, в остальных превышает фон в 1,8–2,8 раза. Максимальное содержание приурочено к территории ОАО «Эмпилс» и достигает 150 и 400 мг/кг. Несмотря на общий высокий уровень содержания элемента, загрязнение свинцом обнаружено лишь в 3 % от всех почвенных проб. Концентрации свинца снизились по сравнению с 1994 г. в почвах всех ландшафтов, наиболее резко – для промышленных зон: среднее содержание почти в 2 раза, максимальное – в 7,5.

В ходе эколого-геохимических исследований 1980–2000 гг. распределению таких токсичных элементов, как ртуть, кадмий и мышьяк, уделялось мало внимания. Известно, что содержание кадмия в основном изменялось от 0,003 до 0,006 мг/кг, максимальные концентрации, выявленные на участке между ул. Мечникова и Черепихина, составляли 0,25 – 0,35 мг/кг [1]. Проведенные нами исследования показали, что содержание металла варьирует в широком диапазоне – от 0,07 до 2,2 мг/кг. В почвах всех ландшафтов, за исключением природных, среднее содержание элемента выше естественного фона, увеличиваясь от природных (0,16 мг/кг) до промышленных (0,87 мг/кг).

На промплощадке ОАО «Эмпилс» выявлено единственное превышение ОДК (в 1,1 раза). Высокое содержание цинка, свинца и кадмия связано со спецификой производства. Характерной особенностью лакокрасочного производства является использование широкого спектра сырьевых материалов, в том числе пигментов, сиккативов и других компонентов, содержащих тяжелые металлы. Наиболее часто используемыми являются свинцовый сурик, свинцовый и цинковый кроны, цинковые белила, кадмиевая желтая [15].

Почвы промышленных ландшафтов отличаются минимальным содержанием ртути (среднее 0,01

при разбросе от 0,006 до 0,031 мг/кг); селитебных – максимальным (0,21 и 0,06–0,38 мг/кг). Концентрации мышьяка также значительно ниже естественного фона, самыми высокими значениями выделяются селитебные ландшафты – до 20 мг/кг, что в 2 раза выше ОДК.

Содержание меди в почвах различных городских ландшафтов в целом сопоставимо с региональным фоном. Исключение составляют территории парков, где медь превосходит фон в 2,6 раза. Возможно, это связано с применением медьсодержащих пестицидов (бордосской жидкости) при выращивании парковых культур. Только в парковых почвах обнаружены концентрации меди до 300 мг/кг, что в 2,3 раза выше ОДК.

Содержание никеля слабо варьирует от 22 до 80 мг/кг, загрязнение почв этим металлом не выявлено ни в одной точке.

По величине СПЗ подавляющее число почвенных проб относится к допустимой категории загрязнения. Значение СПЗ в диапазоне 16–32 (умеренно опасная категория) зафиксировано лишь в пяти точках опробования, три из которых расположены на промплощадке ОАО «Эмпилс», по одной – на территории парка им. Вити Черевичкина и селитебных одноэтажных ландшафтов на пересечении ул. им. Максима Горького и пер. Нахичеванского.

Выводы

1. Почвы разных функциональных зон различны по уровню содержания химических элементов. Если сравнить средние концентрации металлов и мышьяка с естественным геохимическим фоном, то можно составить следующие геохимические ассоциации:

- природные ландшафты: $Zn_{1,5} - Cu_{1,1} - Ni_{1,1}$;
- селитебные: $Zn_{2,4} - Pb_{2,1} - As_{1,9} - Hg_{1,6} - Cd_{1,2}$;
- рекреационные: $Cu_{2,6} - Zn_{2,3} - Pb_{1,8} - Cd_{1,7} - Ni_{1,2}$;
- промышленные: $Cd_4 - Zn_{3,9} - Pb_{2,8} - Cu_{1,2}$.

2. При ранжировании урболандшафтов по количеству элементов, превышающих фон, выстраи-

вается следующий ряд: рекреационные, селитебные >промышленные >природные. По величине коэффициента концентрации выявляется последовательность: промышленные>рекреационные >селитебные >природные.

3. Городские почвы в целом слабо загрязнены тяжелыми металлами и мышьяком. Наиболее широко распространено цинковое загрязнение (присутствует в 22 % изученных проб), затем медное (7 %), свинцовое (3 %), мышьяковое (2 %) и, наконец, кадмиевое (1 %). Очевидно, что цинк является индикатором загрязнения почвенного покрова г. Ростова н/Д.

4. С течением времени происходят деконцентрация элементов в городских почвах и уменьшение уровня загрязнения.

5. В целом загрязнение городских почв оценивается как допустимое. Локальные участки с умеренно опасным загрязнением выявлены в пределах промышленных ландшафтов, а также селитебных и рекреационных ландшафтов, расположенных в историческом ядре города. В первом случае это объясняется наличием мощного источника загрязнения, во втором – длительным техногенным воздействием.

Литература

1. Приваленко В.В., Остроухова В.М., Домбровский Ю.А., Шустова В.Л., Базельюк А.А., Остробородко Н.П. Эколого-геохимические исследования городов Нижнего Дона. Ростов н/Д., 1993. 268 с.
2. Закруткин В.Е., Скрипка Г.И., Шишкина Д.Ю. Эколого-геохимическая оценка ландшафтов Ростова-на-Дону в зоне влияния РТЭЦ-3 // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 1996. № 3. С. 55 – 63.
3. Приваленко В.В., Безуглова О.С. Экологические проблемы антропогенных ландшафтов Ростовской области. Т. 1. Экология города Ростова-на-Дону. Ростов н/Д., 2003. 290 с.
4. Приваленко В.В., Кузнецов И.Н., Демченко С.Г. Эколого-геохимический мониторинг на полигонах ТОПП г. Ростова-на-Дону. Ростов н/Д., 2009. 297 с.
5. Капралова О.А., Колесников С.И. Влияние загрязнения тяжелыми металлами на эколого-биологические свойства почв г. Ростова-на-Дону // Научная мысль Кавказа. 2012. № 1. С. 69 – 72.
6. СанПиН 2.1.7.1287-03. Санитарно-эпидемиологические требования к качеству почвы. М., 2003.
7. Саит Ю.Е., Ревич Б.А., Янин Е.П. Геохимия окружающей среды. М., 1990. 335 с.
8. Закруткин В.Е., Шишкина Д.Ю., Березуцкий С.В. Ртуть и кадмий в почвах и сельскохозяйственных культурах Ростовской области // Проблемы геологии, полезных ископаемых и экологии Юга России и Кавказа : материалы II междунар. науч. конф. 21 – 23 октября 1999 г. Новочеркасск, 1999. С. 46 – 49.

9. Закруткин В.Е. Геохимия ландшафтов и техногенез. Ростов н/Д., 2002. 308 с.

10. Романюк О.Л. Геохимия свинца и кадмия в агроландшафтах Ростовской области : автореф. дис. ... канд. геогр. наук. Ростов н/Д., 2005.

11. Шишкина Д.Ю., Романюк О.Л. Особенности распределения меди, цинка и марганца в агроландшафтах Ростовской области // Проблемы геохимии эндогенных процессов и окружающей среды : материалы Всероссийской науч. конф. Иркутск, 2007. Т. 1. С. 248–251.

12. Коханистая Н.В. Влияние сельскохозяйственной деятельности на распределение никеля в почвах Ростовской области // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2013. № 3. С. 86–90.

13. ГН 2.1.7.2041–06. Предельно допустимые концентрации (ПДК) химических веществ в почве. М., 2006. 15 с.

14. ГН 2.1.7.2511–09. Ориентировочно допустимые концентрации (ОДК) химических веществ в почве. М., 2009. 11 с.

15. Козыренко М.И. Эколого-геохимическая оценка трансформации почв в зоне воздействия лакокрасочного производства: автореф. дис. ... канд. геогр. наук. Минск, 2013.

References

- Privalenko V.V., Ostroukhova V.M., Dombrovskii Yu.A., Shustova V.L., Bazelyuk A.A., Ostroborod'ko N.P. Ekologo-geokhimicheskie issledovaniya gorodov Nizhnego Dona [Ecological and geochemical studies of the cities of the Lower Don]. Rostov-on-Don, 1993, 268 p.
- Zakrutkin V.E., Skripka G.I., Shishkina D.Yu. Ekologo-geokhimicheskaya otsenka landshaftov Rostovana-Donu v zone vliyaniya RTETs-3 [Ecological-geochemical estimation of landscapes of Rostov-on-Don in the zone of influence RHGS-3]. Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskii region. Estestvennye nauki, 1996, no 3, pp. 55-63.
- Privalenko V.V., Bezuglova O.S. Ekologicheskie problemy antropogennykh landshaftov Rostovskoi oblasti [Ecological problems of anthropogenic landscapes of the Rostov Region]. Vol. 1. Ekologiya goroda Rostovana-Donu [Ecology of the city of Rostov-on-Don]. Rostov-on-Don, 2003, 290 p.
- Privalenko V.V., Kuznetsov I.N., Demchenko S.G. Ekologo-geokhimicheskii monitoring na poligonakh TOPP g. Rostovana-Donu [Ecological and geochemical monitoring of landfills POMB of Rostov-on-Don]. Rostov-on-Don, 2009, 297 p.
- Kapralova O.A., Kolesnikov S.I. Vliyanie zagryazneniya tyazhelymi metallami na ekologo-biologicheskie svoistva pochv g. Rostovana-Donu [Influence of heavy metal pollution in the ecological and biological properties of soils in Rostov-on-Don]. Nauchnaya mysl' Kavkaza, 2012, no 1, pp. 69-72.

SanPiN 2.1.7.1287-03. Sanitarно-epidemiologicheskie trebovaniya k kachestvu pochvy [SanPin 2.1.7.1287-03. Sanitary requirements to the quality of the soil]. Moscow, 2003.

Saet Yu.E., Revich B.A., Yanin E.P. Geokhimiya okruzhayushchei sredy [Geochemistry of the environment]. Moscow, 1990, 335 p.

Zakrutkin V.E. Shishkina D.Yu., Berezutskii S.V. [Mercury and cadmium in soils and crops Rostov Region]. Problemy geologii, poleznykh iskopaemykh i ekologii yuga Rossii i Kavkaza [Problems of geology, mineral resources and ecology of Southern Russia and the Caucasus]. Proceedings of the 2 International Scientific Conference. Novocherkassk, 1999, pp. 46-49.

Zakrutkin V.E. Geokhimiya landshafta i tekhnogenez [Landscape geochemistry and technogenesis]. Rostov-on-Don, 2002, 308 p.

Romanyuk O.L. Geokhimiya svintsa i kadmiya v agrolandshaftakh Rostovskoi oblasti [Geochemistry of lead and cadmium in agricultural landscapes of Rostov Region]: avtoref. dis. ... kand. geogr. nauk. Rostov-on-Don, 2005.

Shishkina D.Yu., Romanyuk O.L. [Features of distribution of copper, zinc and manganese in the agricultural landscapes of the Rostov region]. Problemy geokhimii endogennykh protsessov i okruzhayushchei

sredy [Problems of geochemistry of endogenous processes and the environment]. Proceedings of the scientific conference. Irkutsk, 2007, vol. 1, pp. 248-251.

Kokhanistaya N.V. Vliyanie sel'skokhozyaistvennoi deyatel'nosti na raspredelenie nikelya v pochvakh Rostovskoi oblasti [The impact of agricultural activity on the distribution of nickel in soils of the Rostov Region]. Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskii region. Estestvennye nauki, 2013, no 3, pp. 86-90.

GN 2.1.7.2041-06. Predel'no dopustimye kontsentratsii (PDK) khimicheskikh veshchestv v pochve [GN 2.1.7.2041-06. The maximum permissible concentration (MPC) of chemicals in the soil]. Moscow, 2006, 15 p.

GN 2.1.7.2511-09. Orientirovochno dopustimye kontsentratsii (ODK) khimicheskikh veshchestv v pochve [GN 2.1.7.2511-09. Approximate permissible concentrations (APC) of chemical substances in the soil]. Moscow, 2009, 11 p.

Kozyrenko M.I. Ekologo-geokhimicheskaya otsenka transformatsii pochv v zone vozddeistviya lakokrasochnogo proizvodstva [Ecological-geochemical assessment of the transformation of soil in the affected area of paint production]: avtoref. dis. ... kand. geogr. nauk. Minsk, 2013.

МЕДИЦИНА

УДК: 618.5+618.39+618.346+57.052

**СОВРЕМЕННЫЕ АСПЕКТЫ МЕТАБОЛОМНЫХ НАРУШЕНИЙ
В ОКОЛОПЛОДНЫХ ВОДАХ ПРИ РАННИХ ПРЕЖДЕВРЕМЕННЫХ РОДАХ**

© 2015 г. **Н.А. Друккер, В.А. Линде, З.В. Зенкина, М.Г. Некрасова,
Е.О. Шкотова, В.А. Кулакова, Ю.В. Ганиковская**

Друккер Нина Александровна – доктор биологических наук, главный научный сотрудник, отдел медико-биологических проблем в акушерстве, гинекологии и педиатрии, Ростовский научно-исследовательский институт акушерства и педиатрии, ул. Мечникова, 43, Ростов н/Д, 344012, e-mail: biochem@rniiar.ru

Drukker Nina Aleksandrovna – Doctor of Biological Science, Main Researcher, Department of Medico-Biological Problems in Obstetrics, Gynecology and Pediatrics, Rostov Scientific Research Institute of Obstetrics and Pediatrics, Mechnikov St., 43, Rostov-on-Don, 344012, Russia, e-mail: biochem@rniiar.ru

Линде Виктор Анатольевич – доктор медицинских наук, профессор, директор, Ростовский научно-исследовательский институт акушерства и педиатрии, ул. Мечникова, 43, Ростов н/Д, 344012, e-mail: biochem@rniiar.ru

Linde Viktor Anatol'evich – Doctor of Medical Science, Professor, Director of the Rostov Scientific Research Institute of Obstetrics and Pediatrics, Mechnikov St., 43, Rostov-on-Don, 344012, Russia, e-mail: biochem@rniiar.ru

Зенкина Зоя Вячеславовна – младший научный сотрудник, врач акушер-гинеколог родового отделения, Ростовский научно-исследовательский институт акушерства и педиатрии, ул. Мечникова, 43, Ростов н/Д, 344012, e-mail: zienkinaz@mail.ru

Zenkina Zoya Vyacheslavovna – Junior Researcher, Obstetrician Gynecologist, Rostov Scientific Research Institute of Obstetrics and Pediatrics, Mechnikov St., 43, Rostov-on-Don, 344012, Russia, e-mail: zienkinaz@mail.ru

Некрасова Марина Геннадиевна – кандидат медицинских наук, научный сотрудник, врач акушер-гинеколог родового отделения, Ростовский научно-исследовательский институт акушерства и педиатрии, ул. Мечникова, 43, Ростов н/Д, 344012, e-mail: mn_list.ru

Nekrasova Marina Gennadievna – Candidate of Medical Science, Researcher, Obstetrician Gynecologist, Rostov Scientific Research Institute of Obstetrics and Pediatrics, Mechnikov St., 43, Rostov-on-Don, 344012, Russia, e-mail: mn_list.ru

Шкотова Екатерина Олеговна – младший научный сотрудник, врач акушер-гинеколог родового отделения, Ростовский научно-исследовательский институт акушерства и педиатрии, ул. Мечникова, 43, Ростов н/Д, 344012, e-mail: vytamynka@mail.ru

Shkotova Ekaterina Olegovna – Junior Researcher, Obstetrician Gynecologist, Rostov Scientific Research Institute of Obstetrics and Pediatrics, Mechnikov St., 43, Rostov-on-Don, 344012, Russia, e-mail: vytamynka@mail.ru

Кулакова Валерия Андреевна – младший научный сотрудник, Ростовский научно-исследовательский институт акушерства и педиатрии, ул. Мечникова, 43, Ростов н/Д, 344012, e-mail: firenze-06@mail.ru

Kulakova Valeriya Andreevna – Junior Researcher, Rostov Scientific Research Institute of Obstetrics and Pediatrics, Mechnikov St., 43, Rostov-on-Don, 344012, Russia, e-mail: firenze-06@mail.ru

Ганиковская Юлия Викторовна – научный сотрудник, Ростовский научно-исследовательский институт акушерства и педиатрии, ул. Мечникова, 43, Ростов н/Д, 344012, e-mail: yganikov@mail.ru

Ganikovskaya Yuliya Viktorovna – Researcher, Rostov Scientific Research Institute of Obstetrics and Pediatrics, Mechnikov St., 43, Rostov-on-Don, 344012, Russia, e-mail: yganikov@mail.ru

Изучен в околоплодных водах комплекс взаимосвязанных биорегуляторов сократительной деятельности матки. Определены аннексин, кахектин, ДНК-связывающая активность субъединицы p65 NF- κ B и фосфолипазы A₂. Выявлено повышение содержания аннексина, кахектина и активности ФЛА₂ при со-

хранении ДНК-связывающей активности p65 NF-kB на уровне нормы. Такой характер изменений свидетельствует о ведущей роли модификации кахектина в нарушении регуляторных реакций сократительной активности миометрия.

Ключевые слова: преждевременные роды, околоплодные воды, аннексин, кахектин, p65 NF-kB, активность ФЛА₂.

We studied in the amniotic fluid the complex of interrelated regulation of contractile uterine activity. We identified the annexin, cachectin, DNA-binding activity P65 subunit of NF-kB and phospholipase A₂. Identified increased levels of annexin, cachectin and PLA₂ activity while maintaining DNA-binding activity p65 NF-kB at the physiological level. That confirms the leading role of modifications cachectin in violation of regulatory reactions of contractile activity of myometrium.

Keywords: preterm birth, amniotic fluid, annexin, cachectin, R65 NF-kB, activity A₂.

Значительная роль в отсутствии тенденции к снижению количества преждевременных родов принадлежит широкому внедрению вспомогательных репродуктивных технологий (ЭКО, ICSI, стимуляция овуляции), в связи с чем выросло количество многоплодных беременностей, являющихся фактором риска преждевременного её прерывания [1]. При этом экстрагенитальная патология у женщин и наличие рубца на матке также служат факторами развития преждевременных родов. Наряду с медицинской проблемой преждевременные роды ассоциируются с социальной проблемой, так как перинатальная заболеваемость и смертность у недоношенных новорождённых в 40 раз выше, чем у доношенных. В то же время имеются данные о повышенной заболеваемости и смертности у недоношенных детей при многоплодии, которые в 4–11 раз выше, чем при преждевременных родах одним плодом [2]. В научной литературе имеются указания на необходимость уделить особое внимание современным методам диагностики преждевременного прерывания беременности. Следует подчеркнуть, что все клинические методы, которые обладают высокой чувствительностью (клинические симптомы, укорочение шейки матки по данным УЗИ), считают поздними признаками преждевременных родов, когда терапия данного осложнения беременности может быть неэффективной. Полученные в последнее время сведения о происхождении околоплодных вод, скорости циркуляции и процессах их резорбции, а также новые данные о патогенезе мало- и многоводия способствовали появлению значительного интереса к их изучению [3]. При этом в связи с достижениями молекулярной биологии систематизированы исследования о динамике информационных регуляторных биологически активных макромолекул амниотической жидкости и влияние на них системы «малых молекул». В то же время весьма мало сведений о роли околоплодных вод как биологического посредника передачи информации от плода к материнскому

организму [3, 4]. Поэтому особую актуальность приобретают вопросы современного биохимического анализа околоплодных вод при различных акушерских патологиях, в том числе и преждевременных родах, с целью выяснения механизма развития данной патологии и возможности проведения научно обоснованных терапевтических мероприятий и реальной профилактики данного осложнения беременности.

Для своевременного прогнозирования преждевременных родов необходимы выявление возможных метаболических изменений, участвующих в регуляции сократительной деятельности матки, и разработка маркёров этой патологии с целью её предупреждения. В настоящее время не вызывает сомнений, что преждевременные роды – результат не одной, а многих причин, приводящих к несвоевременному усилению маточной активности. Последняя регулируется суммированным действием многих биоактивных компонентов, причём снижение продукции любого из её ингибиторов или повышение стимуляторов может обусловить преждевременную контрактильную активность миометрия и привести к прерыванию беременности. Поскольку в инициации родов ведущую роль играют простагландины, изучение метаболических изменений, влияющих на интенсивность их синтеза в компонентах фетоплацентарного комплекса, в том числе околоплодных водах, с позиций достижений молекулярной биологии имеет важное значение для понимания процессов развязывания родовой деятельности в разные сроки гестации [5, 6].

Целью исследования явилось изучение комплекса функционально взаимосвязанных биорегуляторов сократительной деятельности матки.

Материалы и методы

Под наблюдением находилось 66 беременных женщин, первую группу составили 29 женщин с ранними преждевременными родами (28–32 неде-

ли), возраст которых варьировал в пределах 20–29 лет (40 %). Остальные 37 женщин в возрасте 30–39 лет вошли в контрольную группу. Течение беременности у женщин I группы в 100 % случаев характеризовалось значительным количеством осложнений (угроза прерывания, ЗРП, преэклампсия). Наряду с этим среди беременных I группы у 93,1 % имело место инфицирование хламидиями, трихомонадами, а также выявлена условно-патогенная микрофлора: уреаплазма, микоплазма. Среди данных пациенток первобеременные составили 37,9 %, в то время как в контрольной группе первобеременных было 72,9 %. Возраст последних аналогичен возрасту женщин с ранними преждевременными родами. В то же время гестация и роды у пациенток контрольной группы протекали без осложнений. Среди экстрагенитальных заболеваний, выявленных у пациенток с преждевременными родами, у 72,4 % имела место эндокринная патология: заболевания щитовидной железы, сахарный диабет, гипофункция яичников, синдром гиперандрогении, врожденная дисфункция коры надпочечников.

Материалом для исследования служили околоплодные воды, полученные в первом периоде родов при их отхождении. Определение аннексина, кахектина проводили иммуноферментным методом, наборами фирмы Europe/Inc (Австрия). ДНК-связывающую активность субъединицы p65 транскрипционного фактора NF-kB и фосфолипазы A₂ (ФЛА₂) оценивали с помощью иммуноферментных наборов фирмы Cayman Chemical (США).

Статистическую обработку данных осуществляли с помощью лицензионного пакета программ Statistica (фирмы Satsoft. Inc., версия 5.1). Для оценки статистической значимости различий между сравниваемыми величинами в группах использовали критерий Стьюдента (t-критерий). Отклонения между рядами считали достоверными при вероятности различий, превышающих 95 % ($p < 0,05$).

Результаты исследования показали, что в околоплодных водах женщин с ранними преждевременными родами выявлены изменения в содержании биорегуляторов сократительной деятельности матки (таблица).

Так, уровень аннексина был в 2,1 раза выше контрольных данных ($p < 0,00049$), а уровень кахектина также превышал физиологические показатели в 1,5 раза ($p < 0,000001$), в то время как ДНК-связывающая активность субъединицы p65 транскрипционного фактора NF-kB соответствовала контрольным данным. На фоне представленных полученных показателей околоплодных вод, так же как и аннексин, наиболее значимые изменения обнаружены в активности ФЛА₂, её величина превышала физиологические данные более чем в 2 раза

($p=0,00022$). Метаболическая взаимосвязь описанных клеточных биорегуляторов такова: ядерный фактор NF-kB активируется кахектином, при этом аннексин контролирует активность ФЛА₂ (в данном случае ингибирует её). У пациенток с ранними преждевременными родами соответствие норме активности p65 ядерного фактора, надо полагать, – результат действия высокого уровня кахектина (провоспалительного цитокина) [7]. Это является результатом присоединения к нему белка IκB, нейтрализующего его активность и только при фосфорилировании IκB, обеспечивается функция p65 NF-kB. Известным ингибитором продукции кахектина в околоплодных водах является бикунин, осуществляющий эту функцию через блокирование CD-14/TLR4/MD₂. Однако при ранних преждевременных родах этот белок в амниотической жидкости не обнаружен [3]. Последнее свидетельствует об отсутствии фактора, ограничивающего синтез кахектина, мощного провоспалительного полипептида. В этом случае наблюдается димеризация данного ядерного фактора на субъединицы p50 и p65. Последнее приводит к активации других генов, вызывающих, по-видимому, синтез иных белков и полипептидов, не свойственных данному сроку беременности. Выше указывалось, что имело место высокое содержание в околоплодных водах аннексина, функция которого заключается в ингибировании ФЛА₂. Но у данных женщин активность этого фермента в околоплодных водах была также повышена более чем в 2 раза ($p = 0,00022$). Можно полагать, что в такой метаболической ситуации при преждевременных родах имеются другие факторы, определяющие повышение активности ФЛА₂, что приводит к дисбалансу в регуляторных реакциях сократительной деятельности матки.

Содержание биорегуляторов в околоплодных водах у беременных с ранними преждевременными родами

Показатель, о.е/мг белка	Ранние преждевременные роды	Физиологические роды	p
Кахектин, пг/мл	87,9±1,8*	60,7±1,7	p=0,000001
Аннексин, пг/мл	0,517±0,072*	0,245±0,065	p=0,00049
Фосфолипаза A ₂ , пг/мл	7973±526*	3867±373	p=0,00022
p65 ядерного фактора NF-kB	52,5±8,3	58,0±6,5	p=0,99156

* – достоверные различия относительно контрольных данных.

Особого внимания заслуживает соотношение регуляторных полипептидов кахектина и аннексина при физиологических и ранних преждевременных родах, равное в первом случае 248, а во втором – 170. Последнее свидетельствует о том, что при физиологической беременности продукция кахектина почти в 250 раз выше относительно аннексина. Поскольку кахектин является активатором ядерного фактора NF- κ B, то становится очевидным, что хотя и сохраняется при ранних преждевременных родах активация ядерного фактора NF- κ B на физиологическом уровне, который в свою очередь обеспечивает также синтез ФЛА₂, но в то же время выявленное повышение содержания аннексина в околоплодных водах свидетельствует о нарушении его продукции. Этот процесс контролируется глюкокортикоидами, реализующими своё действие через аннексин [8], что подтверждает роль воспалительного процесса в модификации изученных регуляторных компонентов, лежащих в основе преждевременной сократительной активности миометрия. Наряду с этим увеличенный уровень аннексина усиливает ингибирующее действие на активность ФЛА₂. Можно полагать, что в этих условиях, хотя и имеет место повышение содержания в околоплодных водах аннексина, оно оказывается недостаточным для поддержания физиологической активности фосфолипазы А₂. Такое значительное увеличение активности ФЛА₂, несомненно, способствует активированию каскада арахидоновой кислоты, приводящей к синтезу простагландинов, а следовательно, и усилению сократительной деятельности матки, завершающейся преждевременными родами. Несомненный интерес представляют выявленные особенности метаболических взаимоотношений изучаемых компонентов. Известно, что активация синтеза аннексина контролируется гормонами надпочечников. В данном случае у женщин с ранними преждевременными родами имели место заболевания, свидетельствующие о гипопункции надпочечников. Последнее имеет большое значение для понимания молекулярных механизмов увеличения содержания аннексина в околоплодных водах без участия гормонов надпочечников, которые, действуя на аннексин, снижают доступность фосфолипидных субстратов для фосфолипазы А₂ и подавляют синтез простагландинов [9]. Проведённые исследования позволяют считать, что в повышении уровня данного полипептида в околоплодных водах при ранних преждевременных родах, очевидно, участвуют свободные радикалы, являющиеся неизменными спутниками в условиях патологии, в том числе и при бактериальных инфекциях [10]. Как указывалось выше, у наблюдаемых женщин выявлены различные виды инфекций, что позволяет

считать их источником образования свободных радикалов. Интенсификация свободнорадикальных процессов модифицирует активность ферментов, ускоряющих синтез простагландинов [10].

Резюмируя полученные данные, можно заключить, что модификация содержания молекулярных клеточных биорегуляторов сократительной активности матки в околоплодных водах находит отражение в нарушении их взаимодействия, являющемся одним из начальных метаболических повреждений, и может служить специфическим механизмом преждевременных родов.

Выявленные изменения в содержании биорегуляторов сократительной активности миометрия в околоплодных водах при ранних преждевременных родах позволяют акцентировать внимание на том, что ведущим компонентом, нарушающим регуляторные реакции в изученном комплексе, является модификация кахектина (провоспалительного цитокина). Таким образом, повышение содержания кахектина и активности фосфолипазы А₂ в околоплодных водах при беременности, осложнённой ранними преждевременными родами, является специфическим критерием развития этого осложнения и может быть использовано для их диагностики. Из полученных данных можно сделать вывод, что нарушение соотношений клеточных биорегуляторов в околоплодных водах, которое находит отражение в сократительной активности миометрия, является одним из начальных повреждений, приводящих к дальнейшим метаболическим и функциональным нарушениям, обуславливающим ранние преждевременные роды.

Литература

1. Савельева Г.М., Шалина Р.И., Курцер М.А. Преждевременные роды как важнейшая проблема современного акушерства // Акушерство и гинекология. 2012. № 8–2. С. 4–10.
2. Сидельникова В.М., Сухих Г.Т. Невынашивание беременности. М., 2010. 534 с.
3. Погорелова Т.Н., Гунько В.О., Друккер Н.А. Динамика протеомного профиля околоплодных вод при физиологической и осложнённой беременности // Вopr. биол., мед., фарм. и химии. 2010. № 11. С. 42–47.
4. Погорелова Т.Н. Свободные аминокислоты околоплодных вод в прогнозировании церебральных поражений у новорождённых // Актуальные проблемы педиатрии : материалы XV конгресса педиатров России с междунар. участием. М., 2011. С. 668 – 668.
5. Козлов П.В. Этиология и патогенез преждевременного разрыва плодных оболочек при недоношенной беременности // Вопросы гинекологии, акушерства и перинатологии. 2007. № 6 (2). С. 64 – 72.

6. Никашина А.А., Крукиер И.И., Кудяев А.Е. Активность свободнорадикальных процессов в сыворотке крови женщин с беременностью высокого риска // Мед. вестн. Юга России. 2013. № 4. С. 115–118.

7. Орлов В.И., Погорелова Т.Н., Крукиер И.И. Околоплодные воды. Химический состав и биологические функции. Ростов н/Д., 2009. 223 с.

8. Дедов И.И. Инновационные технологии в лечении и профилактике сахарного диабета и его осложнения // Сахарный диабет. 2013. № 3. С. 2 – 10.

9. Радзинский В.Е. Акушерская агрессия. М., 2011. 688 с.

10. Dunder O., Yoruk P., Tutuncu I. Second trimester amniotic fluid annexin A5 levels and subsequent development growth restriction // J. Prenat. Diagn. 2008. Vol. 28, № 10. P. 887 – 891.

References

19. Savel'eva G.M., Shalina R.I., Kurtser M.A. Prezhdevremennyye rody kak vazhneishaya problema sovremennogo akusherstva [Premature birth as the most important problem of modern obstetrics]. *Akusherstvo i ginekologiya*, 2012, no 8-2, pp. 4-10.

20. Sidel'nikova V.M., Sukhikh G.T. *Nevynashivanie beremennosti* [Miscarriage]. Moscow, 2010, 534 p.

21. Pogorelova T.N., Gun'ko V.O., Drukker N.A. Dinamika proteomnogo profilya okoloplodnykh vod pri fiziologicheskoi i oslozhnennoi beremennosti [Dynamics of proteomic profile of amniotic fluid at physiological and complicated pregnancy]. *Voprosy biologicheskoi, meditsinskoi i farmatsevticheskoi khimii*, 2010, no 11, pp. 42-47.

22. Pogorelova T.N. [Free amino acids of amniotic fluid in predicting cerebral lesions in newborns]. *Aktual'nye problemy pediatrii* [Actual problems of pediatrics]. Articles 15 Congress of Pediatricians of Russia with international participation. Moscow, 2011, pp. 668-686.

23. Kozlov P.V. Etiologiya i patogenez prezhdevremennogo razryva plodnykh obolochek pri nedonoshennoi beremennosti [The etiology and pathogenesis of premature rupture of membranes in preterm pregnancy]. *Voprosy ginekologii, akusherstva i perinatologii*, 2007, vol. 6 (2), pp. 64-72.

24. Nikashina A.A., Krukier I.I., Kudaev A.E. Aktivnost' svobodnoradikal'nykh protsessov v syvorotke krovi zhenshchin s beremennost'yu vysokogo riska. *Meditsinskii vestnik Yuga Rossii*, 2013, no 4, pp. 115-118.

25. Orlov V.I., Pogorelova T.N., Krukier I.I. *Okoloplodnye vody. Khimicheskii sostav i biologicheskie funktsii* [Amniotic fluid. Chemical composition and biological functions]. Rostov-on-Don, 2009, 223 p.

26. Dedov I.I. Innovatsionnye tekhnologii v lechenii i profilaktike sakharnogo diabeta i ego oslozhnenii [Innovative technologies in the treatment and prevention of diabetes and its complications]. *Sakharnyi diabet*, 2013, no 3, pp. 2-10.

27. Radzinskii V.E. *Akusherskaya agressiya* [Obstetric aggression]. Moscow, 2011, 688 p.

28. Dunder O., Yoruk P., Tutuncu I. Second trimester amniotic fluid annexin A5 levels and subsequent development of intrauterine growth restriction. *J. Prenat. Diagn.*, 2008, vol. 28, no 10, pp. 887-891.

ШТРИХИ К ПОРТРЕТУ

ИОСИФ ИЗРАИЛЕВИЧ ВОРОВИЧ

21 июня 2015 г. исполняется 95 лет со дня рождения Иосифа Израилевича Ворovichа – выдающегося российского ученого, обогатившего науку многими достижениями в области механики и математики, замечательного педагога, создавшего школу механиков, продолжающую свою научную деятельность и имеющую и по сей день высокую репутацию в стране и за рубежом

И.И. Ворovich родился в старинном городке Стародубе на Брянщине, где и окончил среднюю школу. Интерес к точным наукам у него проявился еще в юношеские годы: девятиклассником он заменил заболевшего учителя математики и вел занятия в старших классах.

В 1937 г. И.И. Ворovich поступил в Московский государственный университет на отделение механики, где преподавали ученые, являющиеся гордостью русской и советской науки. Первую научную работу по контактным задачам молодой ученый выполнил во время обучения под руководством будущего академика и директора Института проблем механики АН А.И. Ишлинского.

С начала Великой Отечественной войны И.И. Ворovich в числе других студентов МГУ был призван в ряды Красной Армии и направлен на учебу в Военно-воздушную инженерную академию им. Н.Е. Жуковского. В те суровые годы курсанты помимо приобретения инженерных знаний проходили производственную практику на прифронтовых аэродромах. И.И. Ворovich в 1942 г. был авиамехаником на Волховском фронте. В 1944 г., окончив Академию с отличием, был оставлен для прохождения службы, далее направлен в строевую часть для приобретения практического опыта, затем участвовал в войне с Японией на Забайкальском фронте в качестве авиатехника и авиаинженера. В 1945 г. в составе колонны Академии Н.Е. Жуковского был участником Парада Победы

В 1947 г. он был отозван из строевой части для продолжения учебы в Академии, где под руководством выдающегося ученого академика В. С. Пугачева выполнил специальную научную работу по закрытой тематике, которую в 1950 г. защитил как кандидатскую диссертацию. Тогда же И.И. Ворovichу в Минвузе РСФСР предложили преподавательскую работу. Его выбор пал на Ростовский государственный университет, где он начиная с 1950 г. прошел все ступени преподавательской лестницы, создав кафедру теории упругости, инсти-

тут механики и прикладной математики, школу учеников и последователей.

Плодотворная работа по ряду научных направлений математической теории упругости выдвинула И.И. Ворovichа в число известных в стране специалистов.

Еще во время войны его заинтересовали некоторые вопросы интенсивно развивающейся теории оболочек. Эти исследования продолжились в Ростовском госуниверситете и в 1958 г. И.И. Ворovich защищает докторскую диссертацию в Ленинградском университете на тему «Некоторые математические вопросы нелинейной теории оболочек», в которой были заложены строгие математические основы этого раздела механики. Содержание работы далеко выходит за пределы теории оболочек, имеет важное значение для теории нелинейных операторов в целом.

Диссертация получила высокую оценку академиков Ю.Н. Работнова и В.В. Новожилова, профессора С.Г. Михлина, члена-корреспондента РАН О.А. Ладженской. Эта работа сохранила актуальность до настоящего времени, что послужило основанием для ее издания в 1990 г. в виде монографии с соответствующей доработкой; в 1998 г. вышла в США.

В диссертации И.И. Ворovich доказал теоремы разрешимости сложных нелинейных краевых задач теории тонкостенных конструкций. Здесь были обоснованы приближенные методы, особое внимание уделено проблеме устойчивости. Эта проблема имеет важное практическое значение, трудна в математическом плане, так как сводится к оценке числа решений нелинейной краевой задачи, что было сделано с применением новых топологических подходов. Результаты были сразу же признаны выдающимися в стране и за рубежом.

Начатое в Ростовском университете плодотворное развитие актуальных направлений в области механики привело к созданию по инициативе И.И. Ворovichа в 1961 г. кафедры теории упругости на физико-математическом факультете. В 1961 г. здесь был заключен первый хозяйственный договор практического характера; с этого момента И.И. Ворovich начинает осуществление программы по внедрению теоретических разработок в практику, что стало одним из руководящих принципов всей его деятельности. Здесь также следует отметить цикл работ по использованию статистических методов при исследовании устойчивости оболочек.

К концу 60-х гг. XX в. на кафедре И.И. Воровича наряду с глубокими теоретическими разработками уже выполнялись и экспериментальные исследования в области устойчивости тонкостенных оболочек, механики полимеров и другие.

В 1971 г. Постановлением Совета Министров РСФСР был создан Научно-исследовательский институт механики и прикладной математики (НИИМ и ПМ), директором которого был назначен И.И. Ворович. Основной принцип формирования кадрового состава был тот же: сочетание фундаментальных и прикладных исследований. В Институте получили развитие многие фундаментальные направления кафедры теории упругости, но вместе с тем развивались и прикладные исследования в области прокатного оборудования, прочности подшипников, дефектоскопии, фундаментостроения, гидроэкологии и другие направления. В области прикладной математики по инициативе И.И. Воровича было создано новое для Ростовской математической школы научное направление – математическое моделирование сложных экологических и экономических систем.

Тридцать лет И.И. Ворович успешно руководил институтом, который превратился в ведущий на Юге России научный центр в области механики и прикладной математики.

Решая проблему перехода от трехмерной задачи теории упругости к двумерной, И.И. Ворович разработал новый вариант асимптотического метода и выявил ряд общих закономерностей. На этой основе построены уточненные методы расчета пластин и оболочек, широко используемые в настоящее время. Существенный вклад И.И. Ворович внес и в изучение смешанных статических и динамических задач теории упругости. Одним из первых он начал исследовать и решать смешанные краевые задачи для полуограниченных областей, разработав эффективные асимптотические методы, нашедшие многочисленные приложения.

Значительная часть работ И.И. Воровича посвящена динамическим задачам теории упругости для полуограниченных областей (типа полосы, слоя, цилиндра). В них произведено качественное исследование свойств решений и дано полное описание множества решений в различных классах функций, представлены критерии отбора единственного решения.

В ряде трудов И.И. Ворович выдвинул и обосновал принцип устойчивости естественного ненапряженного состояния, на основе которого установил ограничения на способы описания реологических свойств вязкоупругих материалов. Совместно с учениками И.И. Ворович одним из первых дал

вариационную постановку и решил ряд связанных задач термовязкоупругости в теории оболочек.

Большое внимание он уделил исследованию критериев потери устойчивости вязкоупругих тонкостенных конструкций, в результате чего возникла динамическая трактовка задачи потери устойчивости таких конструкций.

Широкую известность получили исследования Иосифа Израилевича по математическому моделированию экологических систем. Он был одним из инициаторов разработки эколого-математической модели Азовского моря, по адекватности и анализу учтенных факторов считаемой пионерской в мировой практике и получившей высокую оценку ученых и общественности страны. В 1983 г. за создание этой модели ему в числе других ученых была присуждена Государственная премия СССР.

Научная и педагогическая деятельность И.И. Воровича по достоинству оценена научным сообществом. В 1970 г. он избран членом-корреспондентом АН СССР по Отделению проблем машиностроения, механики и процессов управления; а в 1990 г. действительным членом АН СССР.

За цикл работ по фундаментальным проблемам тонкостенных конструкций И.И. Ворович в составе группы исследователей был в 1998 г. удостоен Государственной премии Российской Федерации.

В течение 50 лет выдающийся ученый и талантливый педагог И.И. Ворович вел преподавательскую работу в Ростовском государственном университете. Большим авторитетом в России и за ее пределами пользуется созданная им научно-педагогическая школа ученых-механиков, среди которых около 50 докторов и более 130 кандидатов наук.

На протяжении многих лет он возглавлял редакционную коллегию журнала «Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки (Известия СКНЦ ВШ)».

Из научной школы И.И. Воровича вышел ряд ректоров и заведующих кафедрами ведущих вузов России, ученых, создавших новые научные направления.

За боевые и трудовые заслуги он был награжден рядом орденов и медалей СССР и Российской Федерации, удостоен медалей академиков П.Л. Капицы и А.А. Благонравова.

Чувство долга и гражданской ответственности И.И. Воровича, способность самозабвенно трудиться и увлечь других, душевность и доступность в общении, человеческое обаяние его личности, проявлявшееся в разнообразных жизненных обстоятельствах, остаются в памяти его коллег, учеников, аспирантов, студентов университета и всех тех, кто имел счастье общаться с этим великим Человеком.

Огромное научное наследие академика РАН И.И. Воровича продолжает служить науке.

Ватутлян А. О., Карякин М. И., Чебаков М. И.